РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*. УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 1579—2045 **№ 4** **Апрель 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1579. **Годичное собрание Академии наук Туркменской ССР.** Изв. АН ТуркмССР, 1954, № 2, 93—95

Отчет об общем собрании Академии наук Туркмении, посвященном итогам деятельности Академии за 1951—1953 гг.

1580. **Состояние работы и достижения Польской академии наук. Отчет о III общем собрании членов Польской академии наук. Цесляк** (Stan prac i osiągnięcia Polskiej akademii nauk. Sprawozdanie z III zgromadzenia ogólnego członkow PAN. Cieślak Tadeusz Stanisław), Nauka polska, 1954, 2, № 2, 103—114 (польск.)

1581. **Достижения и планы Чехословацкой академии наук. Яблонский** (Osiągnięcia i plany Czechosłowackiej akademii nauk. Jabłoński Henryk), Nauka polska, 1954, 2, № 2, 178—189 (польск.)

Сообщается о работе III общего собрания Чехословацкой академии наук 12—15 апреля 1954 г.

1582. **Состояние работы и достижения Академии наук СССР за 1953 г.** (Stan prac i osiągnięcia Akademii nauk ZSRR w r. 1953), Nauka polska. 1954, 2, № 2, 164—177 (польск.)

Обзор работы годичного собрания АН СССР 1 февраля 1954 г.

1583. **Международный математический конгресс в Амстердаме 2—9 сентября 1954 г. Лохер-Эрнст** (Internationaler Mathematikerkongress in Amsterdam, 2. bis 9. September 1954. Locher-Ernst L.), Elem. Math., 1954, 9, № 6, 137—140 (нем.)

2—9 сентября 1954 г. в Амстердаме состоялся Международный математический конгресс, на котором были представлены почти все страны мира.

Более шестидесяти математиков были приглашены организационным комитетом в качестве докладчиков и более пятисот — для кратких сообщений. Всего на конгрессе присутствовало более 1500 математиков. Было зачитано около 20 пленарных докладов и около 600 рефератов — на заседаниях соответствующих секций: I. Алгебра и теория чисел; II. Анализ; III. Геометрия и топология; IV. Теория вероятностей и статистика; V. Математическая физика и прикладная математика; VI. Логика и основания математики; VII. Философия, история, педагогика.

На Конгрессе постановлено созвать следующий Международный конгресс в 1958 г. (по установившейся традиции конгрессы созываются каждые 4 года) в Эдинбурге. *Л. А. Стебакова*

1584. **Майское собрание в Йосемите** (The May meeting in Yosemite), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 4, 386—399 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 503-му собранию Американского математического общества.

1585. **Набросок математического подхода к истории. Рашевский** (Outline of a mathematical approach to history. Rashevsky N.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, 197—234 (англ.)

На основе идеалистических и в то же время грубо упрощенных механистических посылок строится математическая модель развития общества, начиная от древних «арациональных» культур до современной «рациональной» цивилизации. С помощью детально проведенных вычислений автор пытается доказать, что относительно бо́льшая (по сравнению с другими частями света) быстрота развития Западной Европы в последние несколько столетий объясняется тем, что удельная длина береговой линии морей и рек (отношение длины береговой линии к площади страны) для Западной Европы в 10 раз больше, чем для других частей света. Вычисления автора основаны на тезисе о том, что развитие общества обусловливается распространением идей критически мыслящей части общества; распространение же этих идей зависит от наличия больших городов и удобства сообщений между ними. Советскому читателю не приходится доказывать реакционность и антинаучность такого рода установок. *С. А. Яновская*

1586. **Математика наших дней. Бьюрингтон** (Mathematics for our time. Buringtон R. S.), Math. Teacher, 1954, 47, № 5, 295—298 (англ.)

Призыв к улучшению математической подготовки в средней и высшей школе США. Вместе с тем предлагается перестроить программы так, чтобы математический аппарат на любой ступени

обучения мог быть полностью использован при изучении смежных дисциплин. *В. И. Левин*

1587. О преподавании математики в Германии. Себастьян-и-Силва (Sobre o ensino da matemática na Alemanha. Sebastião e Silva J.), Gaz. mat., 1953, 14, № 55, 8—13 (порт.)

Автор описывает постановку преподавания математики в средних и высших школах Западной Германии.

Средние школы в Германии разделяются на три вида: школа древних языков, школа новых языков и естественно-историческая школа. Разница в преподавании математики сводится, главным образом, к числу часов. В естественно-исторических школах на математику отводится по 4 часа в неделю в течение всех девяти лет преподавания и в течение двух последних лет проходится аналитическая геометрия на плоскости и начала дифференциального и интегрального исчислений с приложениями к геометрии и физике.

В университетах преподавание является в известной степени свободным: программы объявляемых курсов и семинаров могут меняться каждый семестр и каждый год; однако постоянно читаемое ядро составляют анализ бесконечно малых, аналитическая геометрия, теория аналитических функций, дифференциальные уравнения, высшая алгебра (с теорией групп и теорией Галуа) и дифференциальная геометрия. В течение первых двух лет лекции сопровождаются упражнениями (2 часа в неделю). Преподаватель дает студентам каждый раз перечень задач, которые студент обязан решить дома и представить в письменном виде решение преподавателю, который проверяет их, делая замечания на полях, и обсуждает результаты на очных занятиях, когда производится собеседование. Ассистент тратит на проверку приблизительно два дня в неделю. Остальное время он посвящает самостоятельной научной работе.

С 4-го или 5-го семестра упражнения сменяются семинарами, имеющими цель подвести студентов к современным границам науки. Каждому учащемуся дается недавно опубликованная научная работа, которую он обязан проанализировать и сделать о ней краткий доклад перед своими товарищами и профессором. Что касается экзаменов, то обязательными являются лишь государственные: текущая проверка сводится к тому, что каждый месяц студент после предварительной подготовки дает, в форме простого собеседования в кабинете профессора, отчет о проделанной им работе в присутствии своего преподавателя. Распределение занятий в году таково (в Майнцском университете): зимний семестр начинается 1 ноября и кончается в последних числах февраля (с двумя неделями рождественских каникул), а летний продолжается от начала мая до конца июня (с неделей каникул); остальное время студент посвящает самостоятельным научным занятиям (а в настоящее время — и заработку на прожитие); что касается профессоров и преподавателей, то они должны посвящать это время подготовке курсов, читаемых в следующем семестре, и самостоятельной научной работе. В течение учебных семестров преподавание является достаточно насыщенным: читаемые предметы (с упражнениями) берут 4—6 часов в неделю.

И. Н. Веселовский

1588 К. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., изд. 4-е, стереотип., 608 стр., Гостехиздат, М., 1954, 14 р. 30 к.

См. также: 1590, 1717

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

1589. Ранний вклад в развитие аналитической геометрии. Бойер (Early contributions to analytic geometry. Boyer Carl B.), Scripta math., 1953, 19, № 4, 230—238 (англ.)

Статья представляет собой часть работы автора по истории аналитической геометрии; излагаются исследования древних греков до Менехма включительно, связанные с задачей удвоения куба. Трактовка вопроса неоригинальна. *А. П. Юшкевич*

1590. Развитие математики и математического образования в Советском Азербайджане. Эфендиев М. Р., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 3—11

Осенью 1920 г. в Баку впервые были открыты годичные высшие педагогические курсы с преподаванием на азербайджанском языке для подготовки учителей; на базе этих курсов через год был создан Высший педагогический институт с трехлетним, а затем, с осени 1924 г., четырехлетним сроком обучения. В Институте было три отделения: литературно-историческое, физико-математическое и естественно-географическое. В 1927 г. Педагогический институт был временно объединен с Азербайджанским государственным университетом, функционировавшим с 1920 г. В 20-е и 30-е гг. была проведена большая работа по созданию математической терминологии на азербайджанском языке, издан ряд руководств как оригинальных, так и переводных с русского языка. За 30 лет физико-математические факультеты Пединститута и Университета в Баку окончило более тысячи математиков-азербайджанцев.

Значительную помощь в подготовке высококвалифицированных кадров математиков в Азербайджане оказывали русские ученые и ученые Грузии. В 1938—1950 гг. азербайджанские математики защитили 23 кандидатские диссертации, в 1945—1948 гг.— четыре докторские диссертации.

Исследования по различным вопросам математики и механики ведутся в настоящее время в отделе математики Института физики и математики Академии наук Азербайджанской ССР (с 1942 г.), в Научно-исследовательском институте математики и физики при Азербайджанском государственном университете (с 1943 г.) и на его кафедрах, а также на кафедре математического анализа Азербайджанского педагогического института.

В республике издаются два математических журнала: Труды Института физики и математики

АН Азербайджанской ССР (математическая серия) и Труды физико-математического факультета Азербайджанского государственного университета им. С. М. Кирова.

В конце статьи перечислены выпущенные на азербайджанском языке книги по математике и основные направления исследований, без упоминания, впрочем, исследований по геометрии и по истории математики.

См. также РЖМат, 1954, 1931. *А. П. Юшкевич*

1591. О некоторых вопросах истории математики. Клаус (Zu einigen Fragen der Geschichte der Mathematik. Klaus Georg), Urania (Jena), 1953, **16**, № 12, 476—478 (нем.)

Статья написана в связи с выходом книги Крбека (Franz von Krbek, Eingefangenes Unendlich; Zur Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1952). Клаус подчеркивает, что основой правильного решения проблем истории математики является применение методов диалектического и исторического материализма. Отмечая некоторые достоинства книги Крбека, автор показывает, что это сочинение в целом не удовлетворяет требованиям, которые должны быть предъявлены к трудам по истории науки, указывает на плодотворные результаты проведенных в СССР дискуссий о книгах по истории философии и по истории физики и призывает к широкому обмену мнениями по методологическим вопросам истории математики. *А. П. Юшкевич*

1592. Иван Козьмич Андронов. Депман И. Я., Матем. в школе, 1954, № 5, 71—73

К 60-летию со дня рождения математика-методиста проф. И. К. Андронова.

1593. Александр Матвеевич Астряб. Белый Б. Н., Матем. в школе, 1954, № 5, 73—75

К 75-летию со дня рождения и 50-летию научно-педагогической деятельности математика-методиста проф. А. М. Астряба.

1594. Джованни Вакка — математик, историк науки и философ. Карруччо (Giovanni Vacca matematico, storico a filosofo della scienza. Carruccio Ettore), Bull. Unione mat. ital., 1953, **8**, сер. 3, № 4, 448—456 (итал.)

Биография итальянского математика, историка математики и синолога Д. Вакка (1872—1953), содержащая характеристику его важнейших работ по математике и истории математики. В философских вопросах Вакка был близок к платонизму.

1595. Арифметика Франческо Галигаи. Агостини (L'aritmetica di Galigai Francesco. Agostini Amedeo), Period. mat., 1953, **31**, № 4, 201—206 (итал.)

Изложение содержания учебника арифметики итальянского математика Ф. Галигаи, трижды издававшегося в XVI в. (Флоренция, 1521, 1548, 1552).

1596. Памяти Фрица Карлсона. Фростман (Fritz Carlson in memoriam. Frostman Otto), Acta math., 1953, **90**, № 3—4, IX—XI (франц.)

Некролог шведского математика Ф. Карлсона (1888—1952), с портретом и библиографией его математических работ.

1597. Памяти Дэвида Реймонда Кертисса. Моултон (David Raymond Curtiss. In memoriam. Moulton E. J.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 566—569 (англ.)

Некролог американского математика Д. Р. Кертисса (1878—1953).

1598. Лаплас и Сильвестр-Франсуа Лакруа. Татон (Laplace et Sylvestre-François Lacroix. Taton René), Rev. histoire sci., 1953, **6**, № 4, 350—360 (франц.)

На основании неопубликованной переписки французского педагога и автора весьма распространенных руководств С.-Ф. Лакруа (1765—1843) с П.-С. Лапласом, а также некоторых других печатных документов, автор характеризует взаимоотношения между обоими математиками. Будучи дружественными в годы Французской буржуазной революции, эти отношения стали более холодными в эпоху первой империи и реставрации, ибо Лакруа осуждал политический оппортунизм, проявленный Лапласом. В приводимых письмах 1792 г. имеются интересные суждения Лакруа об учебной литературе по анализу XVIII в. и высказывания Лапласа по вопросам обоснования анализа, частью включенные Лакруа в предисловие к т. I его «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. I, Paris, 1797). *А. П. Юшкевич*

1599. Гульельмо Либри как историк математики. Натуччи (Guglielmo Libri come storico della matematica. Natucci Alpinolo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 663—673 (итал.)

Краткое изложение неопубликованной работы автора о жизни и творчестве итальянского историка математики Г. Либри (1802—1869), автора четырехтомной «Истории математических наук в Италии» (Histoire des sciences mathématiques en Italie, Paris, 1838—1841).

1600. Тетради Коррадо Сегре. Терracини (I quaderni di Corrado Segre. Terracini Alessandro), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 252—262 (итал.)

Описание рукописных конспектов итальянского геометра Коррадо Сегре (1863—1924), по которым он читал курсы лекций в Туринском университете с 1888/89 по 1923/24 г.

1601. Аналитическая теория теплоты Фурье. Бюро (La théorie analytique de la chaleur de J. B. J. Fourier. Bureau Florent), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, сер. 5, № 12, 1116—1127 (франц.)

Статья представляет популярный очерк развития математической физики в XVIII и XIX вв. Освещению основных результатов Фурье, содержащихся в его «Аналитической теории теплоты», предшествует краткая характеристика начального периода в развитии гидростатики и гидродинамики, связанного с именами Паскаля, Д. Бернулли, Клеро, Даламбера и Эйлера. Затем так же сжато излагается история известного спора между Даламбером, Эйлером, Д. Бернулли и Лагранжем о звучащей струне.

Характеризуя трудности, возникшие перед математикой конца XVIII в., автор приводит заключе-

ние Деламбра: «все эти трудности показывают, что возможности нашего анализа почти исчерпаны». Автор рассматривает результаты Фурье в теории теплоты как решительное преодоление этих трудностей. При этом дается лишь краткая качественная характеристика физического и математического содержания этих результатов: Фурье установил, что тела обладают способностью сохранять теплоту, получать или передавать теплоту через поверхность и проводить теплоту внутрь массы. Стремление избежать каких бы то ни было формул позволяет автору лишь отметить, что метод Фурье характеризуется существенным применением тригонометрических рядов и интегралов. В статье не отмечается, что выражения для «коэффициентов Фурье» были впервые найдены Клеро, а затем Л. Эйлером. Не упоминает автор и о замечаниях Эйлера, сделанных в 3-м томе его «Оснований интегрального исчисления», о частных интегралах уравнения теплопроводности. В статье содержится краткий биографический очерк Фурье. *Н. И. Симонов*

1602 К. Основы учения о числе в XVIII веке. Молодший В. Н. (Пособие для учителей), 180 стр., Учпедгиз, М., 1953, 4 р. 50 к.

Содержание книги следующее: Глава I. О математической строгости в XVIII в. Глава II. Ф. Энгельс о естествознании, математике и метафизике XVII—XVIII вв. Глава III. Взгляды математиков XVIII в. на предмет и методы обоснования математики. Глава IV. Что такое число? Глава V. Вопросы обоснования арифметики целых (натуральных) чисел. Глава VI. Вопросы обоснования арифметики дробных (ломаных) чисел. Глава VII. Вопросы обоснования арифметики иррациональных чисел (величин). Глава VIII. Вопросы обоснования арифметики положительных и отрицательных величин (чисел). Глава IX. Вопросы обоснования арифметики мнимых величин (комплексных чисел).

Книга заканчивается кратким (4 страницы) заключением автора, как бы подводящим итоги положений, развиваемых в главах I—IX. В качестве приложений в конце книги публикуются пять кратких заметок: 1. «О переписке Эйлера с Кюном». 2. «О попытках доказать правила знаков без явного использования распределительного закона». 3. «О попытках математиков XVIII в. доказать правила знаков». 4. «Об учебнике Н. Муравьева». 5. «Об одном замечании Г. Ганкеля». *Г. А. Сухомлинов*

1603 К. Введение в историю математики. Ивс (An introduction to the history of mathematics. Eves Howard, XV + 422 pp., Rinehart and Co., Inc., New York, 1953, 6.00 doll.) (англ.)

Излагается история элементарной математики. Первые девять глав не требуют сведений, выходящих за пределы простой арифметики и преподаваемых в старших классах средней школы курсов алгебры, геометрии и тригонометрии. Для следующих глав необходимо некоторое знакомство с аналитической геометрией и с основными понятиями анализа. Все основные понятия и получающиеся из них теории более высокого ранга излагаются в тех местах, где они впервые вводятся. Интересной чертой книги является включение в конце каждой главы обзора задач для изучения, возникающих в связи с разбираемыми в тексте историческими темами. Эти темы нижеследующие: числовые системы (гл. 1), вавилонская и египетская математика (гл. 2), греческая математика (гл. 3—6), индусская и арабская математика (гл. 7), европейская математика до 1600 г. (гл. 8) и в XVII в. (гл. 9), аналитическая геометрия (гл. 10), математический анализ (гл. 11), переход к современной математике (гл. 12). К различным главам приложены специальные библиографические обзоры, которые вместе с общей библиографией в конце книги открывают пути к более глубокому исследовательскому изучению.

E. J. Dijksterhuis

Перевод из Math. Revs. 1954, **15**, № 2, 89.

См. также: 1585

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1604. Современное состояние исследований по основаниям математики. Мостовский А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3(61), 3—38

Расширенное изложение доклада автора на VIII съезде польских математиков в Варшаве (6—12 сентября 1953 г.). Дается обзор (без доказательств) наиболее важных результатов, полученных по основаниям математики к 1953 г. Рассматриваются:

(A1) Аксиоматический метод. Сюда относятся: элементарные и неэлементарные системы аксиом, понятия категоричности и абсолютной модели (последнее уточняется автором) и различные применения к арифметике и теории множеств и другим подобным системам, в частности, открытия Гёделя о неполноте этих систем, а также результат Рылл-Нардзевского о конечной неаксиоматизуемости арифметики, затем — нестандартные модели в смысле Россера и Ван Хао, различные аксиоматики теории множеств и результаты Гёделя о непротиворечивости аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы и П. С. Новикова о непротиворечивости некоторых предложений дескриптивной теории множеств; наконец,— аксиоматики действительных чисел, в частности, результат Ван Хао о конечной неаксиоматизуемости теории множеств, о котором говорится, что он «без всяких существенных изменений переносится на теорию действительных чисел».

(A2) Конструктивный метод. Под этой рубрикой автор рассматривает гёделевскую аксиому конструктивности и следствия из нее (непротиворечивость упомянутых выше предложений), разветвленную теорию типов, вычислимый анализ, интуиционистскую логику (последнюю совсем кратко; в частности, не излагается клиновское понятие рекурсивной реализуемости). В качестве одной из актуальных проблем указывается независимость аксиомы конструктивности (а также других аксиом, например, аксиомы выбора) в системе Бернайса — Гёделя.

(B1) Аксиоматизация логики. Рассматривается гёделевская теорема о полноте, дается набросок доказательства Расёвой и Сикорского этой теоремы и указывается на перенесение

ее на неклассические системы, в частности, на систему Гейтинга.

(B2) Проблемы разрешимости. Сюда относятся: теория алгорифмов, в частности, нормальных алгорифмов Маркова; проблема сведения Поста; результаты Тарского, связывающие существенную неразрешимость и конечную аксиоматизируемость; неразрешимость ряда алгебраических проблем, в том числе результат П. С. Новикова об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества; алгоритмы для интуиционистского исчисления высказываний Б. Ю. Пильчак и Н. Н. Воробьева; проективная классификация арифметических множеств и предикатов и относящиеся к ней вопросы отделимости; связь этих вопросов с теоремой о полноте.

(C) Теория рекурсивных функций и алгебраическое направление (около двух страниц).

В заключение автор высказывает свою личную точку зрения по вопросам оснований математики, согласно которой эта проблема имеет философский характер и не может быть раз навсегда разрешена математическими средствами; в частности, указывается, что результаты современной математической логики недостаточны для решения проблемы оснований математики, хотя и оказывают большое влияние на развивающиеся в этой связи исследования.

Автор не стремился к исчерпывающей полноте обзора. Отметим, что он на стр. 18 приписал Гёделю доказанные П. С. Новиковым теоремы о непротиворечивости некоторых предложений дескриптивной теории множеств, ссылаясь при этом на работу, в которой никаких дескриптивных утверждений не содержится. Впрочем, на стр. 19 он замечает, что доказательства этих теорем были впервые опубликованы П. С. Новиковым.

Библиография, 101 название.

А. С. Есенин-Вольпин

1605. О некоторых операциях над логико-арифметическими формулами. Шанин Н. А., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 779—782

Вводится следующая терминология для слов в алфавите

$$0,\ ',\ +,\ \times,\ (,),\ t,\ =,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg,\ \forall,\ \exists.$$

Натуральные числа: $0, 0', 0'', \ldots$ Переменные: (t), (tt), (ttt), ... Термы: всякая переменная и 0 есть терм; если T, T_1, T_2 — термы, то T', $T_1 + T_2$, $T_1 \times T_2$ — также термы. Элементарные формулы: слова вида $T_1 = T_2$, где T_1 и T_2 термы. Формулы: всякая элементарная формула есть формула; если P, Q — формулы и X — переменная, то $\neg P$, $P \vee Q$, $P \& Q$, $\forall XP$, $\exists XP$ — формулы.

Формула Q называется конструктивно истинной (к. и.), если она имеет реализацию в смысле Клини (Kleene S. C., J. Symbolic Logic, 1945, **10**, № 4, 109); в противном случае Q называется конструктивно ложной (к. л.).

Всякий алгорифм α, применимый к любой формуле R и перерабатывающий ее в формулу αR, называется операцией.

Операция $\xi(\eta)$ определяет частный тип понятия конструктивной истинности (ложности), если, какова бы ни была формула R, формула $\xi R \supset R$ ($\eta R \supset \neg R$) является к. и.

В работе вводятся две новые операции Δ_0 и ∇_0, из которых первая определяет частный тип конструктивной истинности, а вторая — частный тип конструктивной ложности. Эти операции характеризуются совместно следующим образом (символ $\overline{\circ}$ обозначает графическое равенство слов):

$$\begin{array}{l|l}
\Delta_0(T=S)\,\overline{\circ}\,(T=S) & \nabla_0(T=S)\,\overline{\circ}\,\neg(T=S)\\
\Delta_0(P\,\&\,Q)\,\overline{\circ}\,(\Delta_0P\,\&\,\Delta_0Q) & \nabla_0(P\,\&\,Q)\,\overline{\circ}\,(\nabla_0P\vee\nabla_0Q)\\
\Delta_0(P\vee Q)\,\overline{\circ}\,(\Delta_0P\vee\Delta_0Q) & \nabla_0(P\vee Q)\,\overline{\circ}\,(\nabla_0P\,\&\,\nabla_0Q)\\
\Delta_0(P\supset Q)\,\overline{\circ}\,(\nabla_0P\vee\Delta_0Q) & \nabla_0(P\supset Q)\,\overline{\circ}\,(\Delta_0P\,\&\,\nabla_0Q)\\
\Delta_0\neg P\,\overline{\circ}\,\nabla_0P & \nabla_0\neg P\,\overline{\circ}\,\Delta_0P\\
\Delta_0\forall XP\,\overline{\circ}\,\forall X\Delta_0P & \nabla_0\forall XP\,\overline{\circ}\,\exists X\nabla_0P\\
\Delta_0\exists XP\,\overline{\circ}\,\exists X\Delta_0P & \nabla_0\exists XP\,\overline{\circ}\,\forall X\nabla_0P
\end{array}$$

Теорема 2 утверждает: какова бы ни была формула R, справедливы графические равенства $\Delta_0\Delta_0R\,\overline{\circ}\,\Delta_0R$, $\nabla_0\Delta_0R\,\overline{\circ}\,\nabla_0R$, $\nabla_0\nabla_0R\,\overline{\circ}\,\Delta_0R$, $\Delta_0\nabla_0R\,\overline{\circ}\,\nabla_0R$.

Дается описание исчисления Σ такого, что всякая выводимая в Σ формула к. и. Это исчисление отличается в несущественных технических деталях от исчисления, исследованного Нелсоном (Nelson D., Trans. Amer. Math. Soc., 1947, **61**, № 2, 307). Присоединение к Σ в качестве дополнительных аксиом всех формул вида $(P \vee \neg P)$ (некоторые из этих формул являются к. л.) порождает исчисление Σ^+.

Теорема 1. Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы $(\Delta_0R \supset R)$, $(\nabla_0R \supset \neg R)$, а в исчислении Σ^+ выводимы формулы $(\Delta_0R \supset R)\ \&\ (R \supset {}_0R)$, $(\nabla_0R \supset \neg R)\ \&\ (\neg R \supset \nabla_0R)$.

Нелсон (Nelson L., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, № 1, 16) ввел частный тип понятия конструктивной ложности посредством операции τ, характеризуемой так:

$$\tau(T=S)\,\overline{\circ}\,\neg(T=S);\quad \tau(P\,\&\,Q)\,\overline{\circ}\,(\tau P\vee\tau Q);$$
$$\tau(P\vee Q)\,\overline{\circ}\,(\tau P\,\&\,\tau Q);\quad \tau(P\supset Q)\,\overline{\circ}\,(P\,\&\,\tau Q);$$
$$\tau\neg P\,\overline{\circ}\,P;\quad \tau\forall XP\,\overline{\circ}\,\exists X\tau P;\quad \tau\exists XP\,\overline{\circ}\,\forall X\tau P.$$

Связь между частными типами конструктивной ложности, которые определяются операциями τ, ∇_0 такова:

Теорема 3. Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула $(\nabla_0R \supset \tau R)$.

Вместе с тем среди формул вида $(\tau R \supset \nabla_0R)$, $(R \supset \Delta_0R)$, $(\neg R \supset \nabla_0R)$ имеются к. л. формулы, а именно $(R_2 \supset \Delta_0R_2)$, $(\neg R_1 \supset \nabla_0R_1)$, $(\tau R_3 \supset \nabla_0R_3)$, где $R_1\,\overline{\circ}\,\exists X\neg(\Gamma\vee\neg\Gamma)$, $R_2\,\overline{\circ}\,\forall X\neg\neg(\Gamma\vee\neg\Gamma)$, $R_3\,\overline{\circ}\,\exists X\neg\neg\neg(\Gamma\vee\neg\Gamma)$.

Имеется опечатка: в формулировке теоремы 2 дважды фигурирует формула $\nabla_0\Delta_0R\,\overline{\circ}\,\nabla_0R$; следует читать один раз $\nabla_0\Delta_0R\,\overline{\circ}\,R\,\overline{\circ}\,\nabla_0R$, а другой раз $\Delta_0\nabla_0R\,\overline{\circ}\,\nabla R$.

Б. А. Трахтенброт

1606. О погружениях классического логико-арифметического исчисления в конструктивное логико-арифметическое исчисление. Шанин Н. А., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 2, 193—196

В работе исследуются конструктивные истолкования классического логико-арифметического исчисления Σ^+. Используются терминология, обозначения и результаты предыдущего сообщения (см. реф. 1605).

Последовательность формул $Q_1, \ldots, Q_n$ называется выводом формулы Q_n в исчислении Σ (соответственно Σ^+), если при каждом k ($k = 1, \ldots, n$)

либо Q_k есть аксиома исчисления Σ (соответственно Σ^+), либо существуют i и j такие, что $i<k$, $j<k$ и $Q_j \overline{\circ} (Q_i \supset Q_k)$, либо существует i такое, что $i<k$ и $Q_k \overline{\circ} \forall X Q_i$, где X — какая-либо переменная. Операция α над формулами называется погружающей операцией (п. о.), если а) существует эффективный метод (алгорифм), позволяющий по любому выводу в Σ^+

$$P_1, \ldots, P_m$$

построить некоторый вывод в Σ формулы αP_m; б) существует эффективный метод, позволяющий по любому выводу в Σ

$$Q_1, \ldots, Q_n$$

и по любой формуле R такой, что $\alpha R \overline{\circ} Q_n$, построить некоторый вывод в Σ^+ формулы R. П.о. α называется правильной погружающей операцией (п.п.о.), если для всякой формулы R конструктивно истинна формула $(R \supset \alpha R)$. Говорится, что операция β есть видоизменение операции α, если для всякой формулы R в Σ выводима формула $(\beta R \equiv \alpha R)$.

Построенные до сих пор п. о. (Колмогоров А. Н., Матем. сб., 1925, **32**, № 4, 646—667; Gödel K., Ergebn. Math. Kolloq., 1933, **4**, 34—38) суть видоизменения операции θ, которая не является правильной.

Строится п. п. о. α_0

$$\alpha_0 R \overline{\circ} \neg \nabla_0 R.$$

Совместно строятся п. п. о. α_1 и операция Δ_1, определяющая частный тип конструктивной истинности. Операция ∇_1

$$\nabla_1 R \overline{\circ} \neg \alpha_1 R$$

определяет частный тип конструктивной ложности. Для всякой формулы R в Σ^+ выводимы формулы

$$(\Delta_1 R \equiv R), \quad (\alpha_1 R \equiv R), \quad (\nabla_1 R \equiv \neg R),$$

а в Σ выводимы формулы

$$(\neg\neg\alpha_1 R \equiv \alpha_1 R), \ (\neg\neg\nabla_1 R \equiv \nabla_1 R), \ (\alpha_1 R \equiv \neg\nabla_1 R),$$
$$(\Delta_0 R \supset \Delta_1 R), \quad (\alpha_1 R \supset \alpha_0 R), \quad (\nabla_0 R \supset \nabla_1 R),$$

но каждая из формул

$$(\Delta_1 R \supset \Delta_0 R), \quad (\alpha_0 R \supset \alpha_1 R), \quad (\nabla_1 R \supset \nabla_0 R),$$
$$(R \supset \Delta_1 R), \quad (\alpha_1 R \supset R), \quad (\neg R \supset \nabla_1 R)$$

может быть конструктивно ложной при специальном выборе R.

Связь построенных п. о. с п. о. θ устанавливается формулами

$$(\Delta_1 R \supset \theta R), \quad (\theta R \supset \alpha_1 R),$$

выводимыми в Σ для каждой формулы R.

Аналогично операциям Δ_0, ∇_0 и α_0 строятся операции λ, γ и χ, представляющие собой соответственно видоизменения операций Δ_1, ∇_1 и α_1.

В. К. Детловс

1607. О категоричности в мощности элементарных дедуктивных систем и некоторых связанных с ней проблемах. Лось (On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. Łoś J.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 58—62 (англ.)

Дедуктивная система называется категоричной, если любые две ее интерпретации (модели) изоморфны. В 1934 г. Сколемом было установлено, что всякая элементарная (т. е. без переменных предикатов) система предложений, имеющая бесконечную модель, не категорична. Из этого не следует, однако, существования у такой системы двух неизоморфных моделей одной и той же мощности. Система, обладающая моделью мощности $\mathfrak{m}$ и любые две модели которой мощности $\mathfrak{m}$ изоморфны, называется категоричной в мощности $\mathfrak{m}$. Если для кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует высказывание $\pi_{\mathfrak{m}}$, тогда и только тогда выполняющееся в модели $\mathfrak{M}$, когда $\mathfrak{M}$ имеет мощность $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m}$ называется определимым кардинальным числом. Если $\mathfrak{m}$ — определимое кардинальное число, то вопрос о категоричности в мощности $\mathfrak{m}$ системы, порожденной множеством аксиом $\mathfrak{X}$, сводится к вопросу о простой категоричности системы, порожденной $\mathfrak{X} + (\pi_{\mathfrak{m}})$.

Приводятся примеры систем, категоричных в разных мощностях. Такова, например, система, порождаемая аксиомами, определяющими плотный порядок без первого и последнего элементов. Всякая счетная модель этой системы изоморфна множеству рациональных чисел, упорядоченному естественным образом, т. е. эта система категорична в мощности $\aleph_0$. Ни в какой другой мощности она не категорична. Система аксиом, определяющая группу, каждый элемент которой p-го порядка (p — простое число), категорична в любой мощности $\mathfrak{m} > \aleph_0$, но не категорична в мощности $\aleph_0$.

Обозначим через $\mathbf{C}(\mathfrak{X})$ множество всех кардинальных чисел $\mathfrak{m}$ таких, что элементарная система $\mathfrak{X}$ категорична в мощности $\mathfrak{m}$. Автор ставит проблему: какие множества кардинальных чисел могут быть представлены в форме $\mathbf{C}(\mathfrak{X})$? *Ю. А. Шиханович*

1608. Система аксиом для исчисления высказываний. Ван ши-цян (王世強) // 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **2**, № 4, 267—274 (кит., резюме англ.)

Показывается, что если за основные операторы классического исчисления высказываний взять $\sim$ и $\vee$, а остальные определить через них обычным образом (вводя, в частности, $p \supset q$ как сокращение для $\bar{p} \vee q$), то для построения этого исчисления достаточно трех аксиом:

$$p \vee p \supset p,$$
$$p \supset p \vee q.$$
$$(p \supset r) \supset (q \vee p \supset r \vee q).$$

Доказывается независимость этих аксиом. Без доказательства приводится решение проблемы 64 из книги Г. Биркгофа «Теория структур» (М., Изд-во иностр. лит-ры, 1952, 198), а именно, если (17) заменить на (17′) $(d, (a, b, c), e) = ((e, b, d), (d, a, e), c)$, то равенства (16) становятся излишними.

А. С. Есенин-Вольпин.

1609 РЕЦ. Основания математики. Суэцуна (數學の基礎・末綱), 岩波書店 (Иванами Сётен), 130 стр., 1952, 250 иен) [**Рецензия: Курота** (黒田成勝) (Сугаку), 1953, **4**, № 4, 63—64 (япон.)]

Рецензент указывает, что в книге рассматриваются и дополняются существующие разработки оснований математики. В основе рассуждений лежат главные идеи философии Нисида: «активная интуиция и противоречивый принцип от частного к общему». Через всю книгу проходит различение понятий «любой конкретный» и «любой общий» (последнее то же, что и «все»). *А. В. Кузнецов*

См. также: 1906

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1610. О разбиении натурального ряда на классы группой линейных подстановок. Гельфонд А. О., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 4, 297—306

Обычное распределение всех натуральных чисел на классы по модулю m можно получить посредством подстановки $L = x + m$, так как числа N и n, связанные цепочкой подстановок

$$N = L\,[L\,[\ldots[L\,(n)]\ldots]],$$

сравнимы по модулю m. Если, следуя А. Г. Курошу, разобьем натуральный ряд на классы группой подстановок

$$L_k = a_k x + b_k, \quad a_k + b_k \geqslant 2, \quad k = 1, \ldots, \mu,$$

где $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$ — целые числа, относя к одному классу числа N и n, связанные цепочкой подстановок

$$L_{k_1}^{\varepsilon_1}\left[L_{k_2}^{\varepsilon_2}[\ldots L_{k_s}^{\varepsilon_s}(N)]\right] = L_{q_1}^{\delta_1}\left[\ldots L_{q_r}^{\delta_r}(n)\right], \qquad (1)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_j = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $L_k^{-1}(x)$ — обратная подстановка, возможная, если $x \equiv b_k \pmod{a_k}$, то множество классов может оказаться бесконечным. Посредством простых соображений в работе устанавливается необходимое и достаточное условие конечности числа классов такого распределения. Если распределение осуществляется при помощи группы подстановок

$$L_k(x) = mx + p_k m + k, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \qquad (2)$$

где $m \geqslant 2$, $p_0 \geqslant 1$, $p_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$ — целые числа, и цепочки (1), то число классов $q = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \geqslant 1$, причем каждый из этих q классов $n_0 = \nu$, n_1, n_2, ... порождается своим «начальным» числом ν, $\nu \geqslant 0$.

Пусть $N_\nu(x)$ — число чисел класса ν, не превосходящих x, $x > 0$ — любое действительное число. Применяя аналитические методы, автор доказывает:

1) $N_\nu(x) = x\varphi_\nu(\ln x/\ln m) + O(1)$, где $\varphi_\nu(t)$ — периодическая функция с периодом 1, удовлетворяющая условию Липшица.

$$2)\ \varphi_\nu(x) = \frac{m^{-2x}}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{w_\nu(z)}{z^3\ln m}e^{zm^x}\,dz, \qquad \sigma > 0,$$

где регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функция

$$w_\nu(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\{-[\nu + p/(m-1)]\,m^k z\} \times$$

$$\times\,(1 - \exp(-m^k z)) \times \prod_{n=0}^{\infty} u(\exp(-m^{k-n-1}z)),$$

$$p = \min_{0 \leqslant k \leqslant m-1}(p_k m + k),$$

$$u(z) = \left[\sum_{k=0}^{m-1} z^{p_k m + k - p}\right]\left[\sum_{k=0}^{m-1} z^k\right]^{-1}.$$

Далее рассматривается связанная с классом чисел ν, n_1, n_2, ... дзета-функция

$$\zeta_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{-s}, \quad n_0 = \nu, \quad \nu > 0, \quad n_0 = p, \quad \nu \neq 0.$$

Обнаруживаются полюсы $\zeta_\nu(s)$ с их порядками и вычеты в них. Наконец, ставится задача использования $\zeta_\nu(s)$ для решения вопроса о распределении простых чисел в последовательности n_0, n_1, n_2, ... Для частного случая, когда $p_0 = p_1 = \ldots = p_{m-1}$, дается предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m^{k+t}}\sum_{n \leqslant m^{k+t}}[N_\nu(n) - N_\nu(n-1)]\,\Lambda(n) = \varphi_\nu(t),$$

где k пробегает натуральный ряд, а $\Lambda(n)$ — функция Мангольта. *И. Г. Мельников*

1611. Асимптотическое распределение целых точек на сфере. Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 5, 909—912

Исследуется вопрос о распределении целых точек на поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = m$ при большом целом m.

Пусть $H(m)$, $H_0(m)$ соответственно обозначают числа любых и примитивных целых точек, лежащих на этой сфере.

Известно, что $H_0(m) \neq 0$ лишь при $m \equiv 1, 2 \pmod 4$ или при $m \equiv 3 \pmod 8$. Также известно, что $H_0(m) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Указываются основные этапы доказательства следующей теоремы: Пусть $m \equiv 1, 2 \pmod 4$ или $m \equiv 3 \pmod 8$. Пусть на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = m$ задана выпуклая сферическая область Γ с кусочно-гладкой границей. Пусть q — нечетное простое число такое, что $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$, $H_0(\Gamma)$, $H(\Gamma)$ — соответственно числа примитивных и любых целых точек, лежащих на Γ. Тогда при $m \to \infty$ и фиксированном q имеем:

$$H_0(\Gamma) = \frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi m}H_0(m)\,(1 + \varkappa_0(\lambda, m, q)), \qquad (1)$$

$$H(\Gamma) = \frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi m}H(m)\,(1 + \varkappa(\lambda, m, q)), \qquad (2)$$

где $\operatorname{mes}\Gamma$ — площадь области Γ, $\lambda > 0$ — любая константа с условием $\operatorname{mes}\Gamma/4\pi m > \lambda$ и $\varkappa_0(\lambda, m, q) \to 0$, $\varkappa(\lambda, m, q) \to 0$ при данных λ, q и $m \to \infty$.

Как указывает сам автор, число q, фигурирующее в теореме, является посторонним фактором, но без него может быть доказана лишь следующая условная теорема, приведенная без доказательства:

Пусть $X_m(n)$ — реальный неглавный характер, построенный для модуля m, и пусть ряд $L(s, X_m) = \sum_{n=1}^{\infty} X_m(n)\,n^{-s}$ не имеет нулей при $|s - 1| < 1/4$. Тогда соотношения (1) и (2) верны с заменой $\varkappa_0(\lambda, m, q)$ и $\varkappa(\lambda, m, q)$ на $\varkappa_0(\lambda, m)$, $\varkappa(\lambda, m)$, стремящиеся к 0 при фиксированном λ и $m \to \infty$. *Г. А. Ломадзе*

1612. Некоторые ряды, связанные с дзета-функцией Римана. Апостол (Some series involving the Riemann zeta function. Apostol T. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 239—243 (англ.)

Рассматривается обобщенная дзета-функция

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s},\quad a>0,\ \operatorname{Re}s>1.$$

Имеют место следующие формулы:

$$\zeta(s,a+1)=\zeta(s,a)+a^{-s}, \tag{1}$$

$$\sum_{h=0}^{k-1}\zeta(s,a+h/k)=k^{s}\zeta(s,ak), \tag{2}$$

$$\zeta(s,a+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-a)^{n}P_{n}(s)\,\zeta(n+s),\ |a|<1, \tag{3}$$

где $n!P_n(s)=s(s+1)\dots(s+n-1)$, $P_0(s)=1$.

Автор рассматривает суммы вида $\sum_{a\in A}\zeta(s,a+1)$, выбирая множество A так, чтобы сумма легко преобразовывалась. Таким образом получено несколько тождеств. Одно из них, после исправления ошибки, имеет следующий вид:

$$\zeta(s)(1-k^{-s})=\sum_{h=1}^{k-1}h^{-s}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}P_{n}(s)\,k^{-(n+s)}\,\zeta(n+s)\sum_{h=1}^{k-1}h^{n},$$

где $\zeta(s)$ есть дзета-функция Римана. Это тождество получается из (3) при $a=h/k$, $h=1,2,\dots,k-1$. При этом используются (1) и (2). *К. А. Родосский*

1613. О проблеме Харди относительно распределения целых, имеющих заданное количество простых делителей. III. Сатхе (On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. III. Sathe L. G.), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 1, 27—42 (англ.)

Эта работа является продолжением большого мемуара автора, цель которого была освещена в одном из прежних рефератов (РЖМат, 1954, 3596; см. также РЖМат, 1954, 5042). В этой части автор оценивает сумму

$$\sum_{p<x^{1-\alpha}}\pi_{\nu}(xp^{-1}).$$

Результат оценки выражен громоздким равенством (формула 223).

Кроме того, автор заканчивает доказательство справедливости равенства (21) для всех ν.

Н. Г. Чудаков

1614. Замечание к работе Эрдёша и Реньи и поправка к ней. Прахар (Bemerkung zu einer Arbeit von Erdös und Renyi und Berichtigung. Prachar K.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 2, 117 (нем.)

Указывается, что в работе Эрдёша и Реньи (Erdös P., Renyi A., Simon Stevon Wis en natuurkundig tijdschrift, 1949—50, 27, 115), содержащей ряд результатов, относящихся к разностям соседних простых чисел, имеется, в частности, лемма, которая неверна. Эта лемма, данная авторами без доказательства, утверждает, что число решений соотношений $p_n-p_{n-1}=a$, $p_{n+1}-p_n=b$, $p_{n+1}\leqslant N$ (p_1, p_2, p_3, ... — последовательность простых чисел) не больше чем

$$C\frac{N}{\lg^{3}N}\prod_{p\mid a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{p\mid a+b}\left(1+\frac{1}{p}\right). \tag{1}$$

Автор нашел, что к выражению (1) следует добавить множитель $\prod_{p\mid b,\,p\mid a}(1+1/p)$. Далее отмечает, что данное им обобщение леммы Эрдёша и Реньи (Monatsh. Math., 1952, 56, 307—312) также неверно и правая часть его неравенства нуждается в добавочном множителе. Значение этого множителя не указано. Утверждается, что исправление леммы не влияет на правильность конечных результатов и только усложняет выводы. *Н. П. Романов*

1615. Асимптотические формулы в теории разбиения чисел на слагаемые. Хаселгров, Темперли (Asymptotic formulae in the theory of partitions. Haselgrove C. B., Temperley H. N. V.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, ч. 2, 225—241 (англ.)

Получена асимптотическая формула для числа $p_m(n)$ разбиений большого положительного числа n на m слагаемых определенного вида, где число m растет определенным образом с ростом n.

Доказана теорема:

Пусть

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots \tag{1}$$

— последовательность целых положительных чисел такая, что 1) ряд $\sum\lambda_r^{-2}$ сходится. Пусть, далее, $\psi(\omega)$ — функция комплексного переменного $\omega=\xi+i\eta$, определенная в области $\xi>0$ равенством

$$\psi(\omega)=\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\lambda_r\omega}$$

и удовлетворяющая условиям: 2) $\sum_{t=1}^{\infty}t^{2}\psi'''(t\xi)=O(\psi'''(\xi))$ при $\xi\to 0$, 3) $\{\psi'(\xi)\}^2<\theta\psi(\xi)\psi''(\xi)$ для некоторого фиксированного $\theta<1$ и достаточно малого ξ, 4) $\xi\psi'''(\xi)=O(\psi''(\xi))$ при $\xi\to 0$, 5) для достаточно малых ξ, $|\psi(\omega)|<\theta\psi(\xi)$ в области $\xi\Delta<|\eta|\leqslant\pi$ для любого фиксированного Δ и некоторого $\theta<1$, зависящего только от Δ.

Введем обозначения

$$\Psi(\omega)=\sum_{r=1}^{\infty}\psi(r,\omega)/r,$$

$$m_0=m_0(\xi)=\sum_{r=1}^{\infty}(e^{\lambda_r\xi}-1)^{-1},$$

$$K(\alpha)=\prod_{r=1}^{\infty}(1+\alpha/\lambda_r)^{-1}e^{\alpha/\lambda_r}$$

и

$$F(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}K(\alpha)\,e^{\alpha y}d\alpha.$$

Тогда при $n\to\infty$ число разбиений $p_m(n)$ числа n на m частей λ_r удовлетворяет соотношению

$$\Delta_m^r\Delta_n^s p_m(n)=\xi^{r+s+1}F^{(r)}((m-m_0)\xi)\,p(n)+$$
$$+o(\xi^{r+s+1}p(n)),$$

где ξ — корень уравнения $\Psi'(\xi)+n=0$, а Δ_m и Δ_n обозначают операции взятия разности соответственно по отношению к переменным m и n, так что $\Delta_n p_m(n)=p_m(n)-p_m(n-1)$ и т. д., $p(n)$ — число разбиений n на слагаемые λ_r определяется формулой

$$p(n)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\Psi''(\xi)\}^{-1/2}\exp\{\Psi(\xi)+n\xi\}. \quad (2)$$

В частности,

$$p_m(n)=\xi F((m-m_0)\xi)\,p(n)+o(\xi p(n)). \quad (3)$$

Полученная теорема применяется к исследованию частных случаев, когда (1) является: (а) натуральным рядом чисел, (б) последовательностью степеней с целыми положительными показателями k, $k>2$, (в) последовательностью простых чисел.

Асимптотические формулы (2) и (3), в форме и при условиях, приспособленных для использования в квантовой статистике, были получены А. Я. Хинчиным (Хинчин А. Я., Математические основания квантовой статистики, Гостехиздат, М. — Л., 1951 г., 161, 204).

Формула (2) в несколько измененном виде доказана референтом элементарным путем, не использующим методы теории аналитических функций (Фрейман Г. А., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 222—224).

Библиография, 10 названий. *Г. А. Фрейман*

1616. К проблеме разбиений. II. Брауэр, Силбиндер (On a problem of partitions. II. Brauer Alfred, Seelbinder B. M.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 343—346 (англ.)

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые положительные взаимно простые числа. Требуется найти такую границу $F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, чтобы диофантово уравнение

$$n=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k$$

было разрешимо в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при $n>F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. В статье Брауэра (Brauer A., Amer. J. Math., 1942, **64**, 299—312) изложен результат, полученный автором совместно с И. Шуром: если $d_1=a_1$, $d_2=(a_1, a_2), \ldots, d_k=(a_1, a_2, \ldots, a_k)=1$ — наибольшие общие делители, то $T=T(a_1, a_2, \ldots, a_k)=a_2d_1'/d_2+a_3d_2'/d_3+\ldots+a_kd_{k-1}'/d_k$ является границей $F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Наилучшей возможной границей при $k=2$ оказывается $T=a_1a_2$. Вообще же T не является наилучшей границей. Однако, если целые a_i/d_i, $i=3, 4, \ldots, k$, представимы в форме

$$a_i/d_i=\left(\sum_{\nu=1}^{i-1}a_\nu y_{i\nu}\right)/d_{i-1},\ \text{где } y_{i\nu}\geqslant 0, \quad (1)$$

то T — наилучшая граница. В случае $k=3$ условие (1) не только достаточно, но и необходимо. Далее было высказано неверное утверждение: при $k>3$ условие (1) не необходимо. В реферируемой работе доказано:

1) Если хотя бы одно из целых чисел a_i/d_i ($i=3, 4, \ldots, k$) нельзя представить в форме (1), то T не является наименьшей границей. Таким образом, (1) является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы T было наилучшей границей при любом k.

2) Если T не является наилучшей границей, то наилучшая граница не превосходит

$$T^*=T-\min(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

И. Г. Мельников

1617. О росте дискриминантов полей алгебраических чисел данной степени. Делоне Б. Н., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 2, 233—236

Доказывается теорема: Пусть D_m ($m=1, 2, 3, \ldots$) — дискриминанты всех алгебраических полей данной степени n и данной сигнатуры, расположенные в порядке неубывания абсолютной величины, $A>0$ — любое постоянное (т. е. не зависящее от m) число, $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число. При всех $m>m_0$ не может выполняться неравенство

$$|D_m|<Am^{\frac{4}{n+2}-\varepsilon}.$$

При доказательстве существенно используется геометрия теории Галуа, построенная Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеевым (см., например, Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, Изд-во АН СССР, 1940, гл. I), в частности, асимптотическая формула Б. Н. Делоне (там же, стр. 21—23), согласно которой число точек всех n-мерных решеток, повторяющихся умножением, лежащих (в n-мерном вещественном пространстве данного сигнатурного типа) внутри шара радиуса r с центром в начале координат, равно $r^{n(n+1)/2}(\nu+\eta)$, где $\nu>0$ не зависит от r и $\eta\to 0$ при $r\to\infty$.

Б. А. Венков

1618. Асимптотическая формула для роста числа абелевых полей степени l^2. Уразбаев Б. М., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 6, 1145—1147

Рассматриваются абелевы поля степени l^2 (l — простое) над полем рациональных чисел, являющихся прямыми произведениями двух циклических полей степени l.

Доказывается, что:

1. Дискриминант поля равен

$$D=(p_1p_2\ldots p_k)^{l(l-1)},$$

где простые $p_i\equiv 1\pmod l$, $i=1, \ldots, k$, l — некритическое.

2. Число всех полей с одним и тем же дискриминантом равно

$$[(l+1)^{k-1}-1]\,l^{-1}(l-1)^{k-2}.$$

3. Пусть $N(x)$ — число полей, для которых $D\leqslant x^{l(l-1)}$; тогда

$$N(x)=xf_l(\lg x)+O(x^{1-(l^2-1)^{-1}+\varepsilon}),$$

$\varepsilon>0$, $f_l(y)$ — многочлен степени l.

Библиография, 5 названий.

Примечание референта. Утверждение 3 весьма сомнительно: доказательство его основано на утверждении автора, что функция $f(s)$ не имеет особенностей, кроме $s=1$, в полуплоскости $\sigma \geqslant a$, так как будто бы тождество (1) аналитически продолжается в эту полуплоскость. Но даже в случае $l=2$ неясна возможность аналитического продолжения бесконечных рядов в правой части (1).

Н. Г. Чудаков

1619. Отношение некоторых данных, полученных с помощью быстродействующих вычислительных машин к теории полей деления круга. Вандивер (The relation of some data obtained from rapid computing machines to the theory of cyclotomic fields. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 6, 474—480 (англ.)

При проверке на вычислительной машине СВАК последней теоремы Ферма для всех $l<2000$ (см. реф. 1638) Вандивер, Д. Лемер и Э. Лемер рассматривали такие критерии, в которые входят числа Бернулли: $B_1=1/6$, $B_2=1/30$, ...

Если K — поле деления круга, образованное простым нечетным числом l, то важно знать, сколько и какие из чисел Бернулли $B_1, B_2, \ldots, B_{(l-3)/2}$ делятся на l. Такая таблица чисел Бернулли для всех $l<2003$ имеется в упомянутой работе. В реферируемой работе разъясняется связь этой таблицы с проблемами поля деления круга, имеющими отношение к делимости чисел Бернулли:

1. Проблемы, имеющие связь с делимостью числа классов идеалов поля K на l^u, где u — целое рациональное >0.

2. «Собственно-иррегулярные» поля (т. е. такие, где H_1/l, $H_2 \not\equiv l$, H_1 и H_2 — «первый» и «второй» множители числа классов идеалов поля K).

3. Регулярные поля ($(H, l)=1$, H — число классов идеалов поля K).

П. Н. Реморов

1620. Об одном распределении кубических характеров по классам. Бейер (Über eine Klasseneinteilung aller kubischen Restcharaktere. Beyer Gudrun), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, **19**, № 1—2, 115—116 (нем.)

Множество всех простых чисел p вида $3k+1$ разбивается на три класса в зависимости от того, лежит ли соответствующая числу кубическая гауссова сумма, нормированная определенным образом, в 1-м, 5-м или 3-м секстанте комплексной числовой плоскости (Хассе Г., Лекции по теории чисел, Из-во иностр. лит-ры, М., 1953, § 20, п. 6).

Куммер, рассмотрев распределение по классам всех $p \equiv 1 \pmod 3$, меньших 500, высказал гипотезу: в каждом из трех классов существует бесконечно много простых чисел, причем плотности этих классов соответственно 1/2, 1/3, 1/6.

Экспериментальное исследование гипотезы Куммера для всех $p \equiv 1 \pmod 3$, меньших 10 000 (РЖМат, 1954, 3116), позволяет автору предположить, что плотности классов, вопреки мнению Куммера, суть 4/9, 3/9, 2/9.

Примечание референта. В «Лекциях по теории чисел» Хассе имеются указания на важность изучения гипотезы Куммера. Там же отмечается, что разработка гипотезы Куммера «была бы гораздо плодотворнее для теории чисел, чем усилия огромного количества профессионалов и дилетантов, направленные на доказательство великой теоремы Ферма».

И. Г. Мельников

1621. Почти периодические критические решетки. Роджерс (Almost periodic critical lattices. Rogers C. A.), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 267—274 (англ.)

Пусть S — звезда в n-мерном евклидовом пространстве R^n, обладающая допустимыми решетками (все решетки считаем однородными, т. е. содержащими начало координат O), и $\Delta(S)$ — точная нижняя граница объемов $\Delta(\Lambda)$ основных параллелепипедов допустимых решеток Λ. Допустимая решетка, для которой $\Delta(\Lambda)=\Delta(S)$, называется критической. Приводятся примеры звезд, имеющих значение в классической теории чисел, именно, звезд, определяемых условием $|F(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant 1$, где

$$(1)\quad \begin{cases} F = x_1 \ldots x_n, \\ F = x_1 \ldots x_r (x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2) \ldots (x_{n-1}^2 + x_n^2), \\ \qquad\qquad 0 < r < n,\ n-r \text{ четное}, \\ F = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2,\ 0 < r < n. \end{cases}$$

Для звезд (1) хотя и известны некоторые свойства допустимых и критических решеток, но эти свойства являются лишь геометрическим истолкованием фактов, получаемых в теории алгебраических чисел и в арифметике квадратичных форм со многими переменными. Целью работы является установление некоторых (хотя и более слабых) теорем, но доказываемых для достаточно общего класса звезд и получаемых прямым геометрическим методом. Звезду S называем автоморфной, если существует группа G линейных подстановок переменных $x_1, \ldots, x_n$, переводящих S в себя (т. е. $\Omega S = S$ для подстановки $\Omega \in G$), причем каждая точка S надлежаще выбранной подстановкой G переводится в фиксированную ограниченную часть R^n. Решетку Λ называем почти периодической для непрерывной группы G, если любой окрестности Λ (в пространстве решеток) соответствует компактное множество H в G, обладающее свойством: для всякой $\Omega \in G$ найдется подстановка $\Theta \in H$ такая, что решетка $\Theta\Omega\Lambda$ лежит в данной окрестности Λ. Доказывается, что всякая автоморфная звезда S с группой G и $\Delta(S) < +\infty$ обладает критической, почти периодической для G решеткой. Пусть U, V — окрестности единичного элемента G, т. е. подстановки $x_1' = x_1, \ldots, x_n' = x_n$. Группу G называем приближенно абелевой, если для всякой U можно подобрать V так, что при любой $\Phi \in G$ имеем $\Phi^{-1} V \Phi \subset U$. Если G абелева, то она и приближенно абелева. Второй результат, полученный в работе, состоит в том, что если Λ — почти периодическая решетка для приближенно абелевой группы G, то для всякой окрестности Λ_1 решетки Λ и всякой подстановки $\Omega \in G$ найдется целое $r>0$ такое, что решетка $\Omega^r \Lambda$ лежит в Λ_1.

Б. А. Венков

1622. Распространение теоремы Минковского — Главка. Черчхауз (An extension of the Minkowski—Hlawka theorem. Churchhouse R. F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 2, 220—224 (англ.)

Пусть R — n-мерное лучевое тело с центром симметрии в начале координат. Критическим определителем $\Delta(R)$ тела R называется точная нижняя

граница определителей решеток, ни одна из точек которых, кроме начала, не содержится в R. Пусть $V(R)$ — объем тела R. Главка (Hlawka E., Math. Z., 1943, 49, 285—312) доказал, что

$$V(R)/\Delta(R) \geqslant 2\zeta(n) = 2\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots\right). \quad (1)$$

(см. еще Санов И. Н., Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, № 2, 101—112).

Показывается, что для некоторого класса лучевых тел неравенство (1) может быть усилено. Доказана теорема: Пусть $g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, — вещественная функция со следующими свойствами: а) $g(0)=1$, $g(1)=0$; б) $g(x)$ выпукла вниз; в) $g(x)=g^{-1}(x)$. Рассмотрим лучевое тело R ($n=2$):

$$|y| < g(|x|), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad (2)$$

с площадью $V(R)$ и критическим определителем $\Delta(R)$. Тогда, если

$$V(R) \geqslant 2\alpha, \quad (3)$$

где α — единственный вещественный корень уравнения $g(\alpha)=\alpha$, то

$$V(R)/\Delta(R) \geqslant 4. \quad (4)$$

Для доказательства этой теоремы отыскивается решетка определителя $V(R)/4$, ни одна из точек которой, кроме начала, не лежит в R. За одну из точек такой решетки берется $(-\alpha, \alpha)$; другая выбирается на прямой $x+y=V(R)/4\alpha$. В силу условия (3) геометрическое исследование довольно просто. Неравенство (4) прилагается, в частности, к лучевому телу $|x|^p+|y|^p \leqslant 1$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$.

Примечание референта. Заглавие «распространение» (extension) не вполне подходит к содержанию: уточнение достигается за счет сужения рассматриваемого класса тел. *А. В. Малышев*

1623. Критический определитель смещенного выпуклого цилиндра. Ф ь ю (The critical determinant of a displaced convex cylinder. F e w L.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 1, № 113, 26—30 (англ.)

Пусть в плоскости $z=0$ трехмерного пространства дана замкнутая выпуклая область K, симметричная относительно некоторой точки Q (не обязательно совпадающей с $O=(0, 0, 0)$). Рассмотрим цилиндр C, образованный точками (x, y, z), где

$$(x, y, 0) \in K, \quad |z| \leqslant 1. \quad (1)$$

Решетка точек (одна из точек решетки совпадает с O) называется допустимой для тела S, если в S не содержится точек решетки, кроме O. Точная нижняя граница $\Delta(S)$ определителей всех допустимых решеток тела S называется его критическим определителем. Доказывается, что

$$\Delta(C) = \Delta(K). \quad (2)$$

Это есть обобщение результата Е (Yeh Y., J. London Math. Soc., 1948, 23, 188—195) и Чока и Роджерса (Chalk J. H. H., Rogers C. A., J. London Math. Soc., 1948, 23, 178—187), где (2) доказано в случае совпадения Q с O. Доказательство обобщает доказательство последних авторов. *А. В. Малышев*

1624. О целых точках в n-мерном эллипсоиде. Ц у д з и (On lattice points in an n-dimensional ellipsoid. T s u j i M a s a t s u g u), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 295—306 (англ.)

Пусть $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ $(n \geqslant 2)$ — положительно определенная квадратичная форма, $V(r)$ — объем n-мерного эллипсоида

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k < r^2. \quad (1)$$

Основными результатами статьи являются следующие теоремы:

1) Пусть $n(r)$ — число целых точек в эллипсоиде (1) и

$$n(r) = V(r) + \Omega(r).$$

Тогда

$$\int_1^r \Omega(r)\, r^{-(n-1)}\, dr = O(1).$$

2) Пусть a_i, $k_i > 0$ $(i=1,2, \ldots, n)$, — целые числа, $n(r; a, k)$ — число целых точек $(x_1, \ldots, x_n)$ в эллипсоиде (1), удовлетворяющих условию

$$x_i \equiv a_i \pmod{k_i} \quad (i=1,2, \ldots, n)$$

и

$$n(r; a, k) = \frac{1}{k_1 \ldots k_n} V(r) + \Omega(r; a, k).$$

Тогда

$$\int_1^r \Omega(r; a, k)\, r^{-(n-1)} dr = O(1).$$

3) Пусть D_0 — n-мерный параллелепипед, построенный на n линейно независимых векторах n-мерного пространства, исходящих из начала. Обозначим через $n(r, Q)$ число точек, эквивалентных точке Q из D_0 по группе смещений, порожденной вышеупомянутыми векторами, содержащихся внутри сферы с центром в начале и радиусом r. Объем сферы обозначим через $v(r)$ и объем D_0 через $v(D_0)$. Тогда

$$\int_1^r \frac{n(r, Q)}{r^{n-1}}\, dr = \frac{1}{v(D_0)} \int_0^r \frac{v(r)}{r^{n-1}}\, dr + O(1) \quad (n \geqslant 2).$$

Первые две теоремы легко получаются из последней. Для доказательства последней теоремы устанавливается существование потенциальной функции на n-мерном торе. *Г. А. Ломадзе*

1625. Детерминанты решеток асимметричных выпуклых областей. С о й е р (The lattice determinants of asymmetrical convex regions. S a w y e r D. B.), J. London Math. Soc., 1954, 2, ч. 2, № 114, 251—254 (англ.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная, открытая, выпуклая область в n-мерном евклидовом пространстве, начало координат $O(0, 0, \ldots, 0)$ принадлежит $\mathfrak{R}$. C, $V(\mathfrak{R})$, $\Delta(\mathfrak{R})$ — граница, объем и детерминант решетки для $\mathfrak{R}$. λ — коэффициент асимметрии для $\mathfrak{R}$: λ = верхняя грань (PO/OP'), где POP' — произвольная хорда границы C, проходящая через O.

Рассматривается функция $\gamma(\lambda, n)$ = верхняя грань $\{V(\mathfrak{R})/\Delta(\mathfrak{R})\}$, когда $\mathfrak{R}$ пробегает области с коэффициентом асимметрии λ.

Цель статьи — определить границы для γ. Доказана теорема: Если $\mathfrak{R}$ — определенная выше область, то существует такая подобласть $\mathfrak{N}$ для $\mathfrak{R}$ $\bigcup$ — $\mathfrak{R}$,

которая выпукла, имеет центр симметрии в точке O и удовлетворяет неравенству

$$V(\mathfrak{R}) \leqslant [2\lambda/(\lambda+1)]^n \{\lambda^n - (\lambda-1)^n\}^{-1} V(\mathfrak{K}).$$

Как следствие из теоремы вытекает, что

$$\gamma(\lambda, n) \leqslant (\lambda+1)^n \{1 - (\lambda-1)^n/\lambda^n\}.$$

Показывается также, что

$$\gamma(\lambda, n) \geqslant (\lambda+1)^n/n\,(\lambda-1),\ \lambda \geqslant 2.$$

Э. Е. Симакова

1626. Произведение неоднородных линейных форм. I. Самет (The product of non-homogeneous linear forms. I. Samet P. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 3, 372—379 (англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — n линейных форм переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами и отличным от нуля определителем. Пусть далее $P_0 = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — точка n-мерного пространства. Рассмотрим при целых рациональных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ P_0) =$$
$$= \min |(\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2)\cdots(\xi_n - \eta_n)|$$

и $M = M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \max\limits_{P_0} M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ P_0)$.

Очевидно, что если координаты точек P и P_0 сравнимы между собой по (mod 1), то

$$M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ P) = M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ P_0).$$

Поэтому можно ограничиться точками, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$-1/2 < \eta_i \leqslant 1/2.$$

Пусть минимум M достигается на некотором множестве σ; тогда обозначим

$$M_2 = M_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \max_{P_1 \notin \sigma} M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ P_1).$$

Очевидно, что $M_2 \leqslant M$. Если $M_2 < M$, то минимум M называется изолированным, а M_2 — вторым минимумом. Аналогично определяется третий, четвертый и т. д. минимумы. Причем эта последовательность минимумов определяется до бесконечности или до первого неизолированного минимума.

В работе рассматривается частный случай

$$\xi_1 = x + y\theta + z\theta^2,$$
$$\xi_2 = x + y\varphi + z\varphi^2,$$
$$\xi_3 = x + y\psi + z\psi^2,$$

где θ, φ и ψ — корни уравнения $t^3 - 4t + 2 = 0$. Доказывается, что в этом случае $M = 1/2$, причем этот минимум достигается, при наложенных на координаты ограничениях, только в точке $(0, 0, 1/2)$. Второй минимум $M_2 = 1/4$ достигается только в точках $(0, 1/2, 0)$ и $(0, 1/2, 1/2)$.

Библиография, 4 названия. *В. Д. Подсыпанин*

1627. Произведение неоднородных линейных форм. II. Минимум одного класса неоднородных линейных форм. Самет (The product of non-homogeneous linear forms. II. The minimum of a class of non-homogeneous linear forms. Samet P. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 3, 380—390 (англ.)

В первой части работы (см. реф. 1626) определены первые два минимума произведений неоднородных линейных функций для одного частного случая. Во второй части определен первый минимум для ряда случаев.

Пусть θ, φ и ψ — корни уравнения $t^3 + at^2 - 2t - a = 0$, пусть далее $a \not\equiv 0 \pmod 4$; 1, θ и θ^2 образуют базис целых чисел поля $R(\theta)$ и a достаточно велико. Тогда для форм

$$\xi_1 = x + y\theta + z\theta^2,$$
$$\xi_2 = x + y\varphi + z\varphi^2,$$
$$\xi_3 = x + y\psi + z\psi^2$$

в случае $a \equiv 2 \pmod 4$, $M = a^2/8$ и достигается только в точке $(0, 0, 1/2)$, а в случае $a \equiv 1$ или $3 \pmod 4$, $M = a^2(1 - a^{-1})^3/8$ и достигается только в точках $\pm(1/a,\ 0,\ 1/2 - 1/2\,a)$. *В. Д. Подсыпанин*

1628. О линейных диофантовых аппроксимациях. Ярник (Über lineare diophantische Approximationen. Jarník Vojtěch), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 189—192 (нем.)

В реферируемой статье сообщается о двух работах молодых чешских математиков, учеников автора.

I. Пусть $m_f(M)$ обозначает внешнюю f-меру Хаусдорфа множества M. Результат работы, принадлежащей Курцвейлю (Kurzweil J., Časop. pěstov. mat., 1952, **1(76)**, 149—178), заключается в следующем:

Если интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{xg(x)}$ расходится, $g(x) > 1000$ для достаточно больших x и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(xg(x))}{g(x)} = 1,$$

то

$$m_{f_1}(N_g) = 0,\ m_{f_2}(N_g) = \infty,$$

где

$$f_1(x) = \exp\left\{\frac{2}{3}\int_1^{x^{-1/2}} \frac{dz}{zg(z)}\right\},$$

$$f_2(x) = \exp\left\{2\int_1^{x^{-1/2}} \frac{dz}{zg(z)}\right\} = f_1^3(x),$$

а N_g обозначает множество всех иррациональных чисел интервала $(0, 1)$, не допускающих аппроксимации $x^{-2}g^{-1}(x)$.

II. Пусть $\odot = \|\vartheta_{ij}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$

$j = 1, 2, \ldots, n)$, $S_j(x, u) = \sum_{i=1}^m \vartheta_{ij} x_i + u_j$.

В работе, принадлежащей Апфельбеку (Apfelbeck A., Časop. pěstov. mat., 1952, **1(76)**, 119—148), рассматривается вопрос о решении в целых числах системы

$$S_1(x, u) = S_2(x, u) = \cdots = S_n(x, u) = 0,$$

где $|x_i| \leqslant t$, $t \geqslant 1$. Иначе говоря, изучается поведение функции

$$\psi_\Theta(t) = \min_{0 < \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| \leqslant t} (\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j(x, u)|).$$

Обозначим через $\alpha(\Theta)$ верхнюю грань всех γ, для которых

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(m+\gamma)/n}\psi_\Theta(t) < \infty,$$

а через $\beta(\Theta)$ — верхнюю грань всех δ, для которых

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(m+\delta)/n}\psi_\Theta(t) < \infty.$$

Основной результат работы состоит в следующем: при $m > 1$, $n > 1$

$$\beta(\bar{\Theta}) \geqslant \frac{n\beta(\Theta)}{m(m+n-1)+(m-1)\beta(\Theta)},$$

где $\bar{\Theta}$ — матрица, транспонированная с Θ.

Справедливость последнего неравенства для $\alpha(\Theta)$ была доказана ранее (Dyson F., Proc. London Math. Soc., 1947, 49, 409—420). Эти результаты являются обобщениями ранних результататов А. Я. Хинчина и Ярника.

Библиография, 16 названий. *П. Г. Когония*

1629. Эллиптические кривые и множества рациональных расстояний. Пиплс (Elliptic curves and rational distance sets. Peeples W. D., Jr.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 29—33 (англ.)

Исследуются достаточные условия существования бесконечного множества рациональных точек на кривой

$$ax(y^2-1) - by(x^2-1) = 0, \qquad (1)$$

где a и b — целые рациональные числа.

Известно, что касательная к кривой (1) в рациональной точке (x, y) пересекает эту кривую еще один раз тоже в рациональной точке. Используя этот факт, автор устанавливает несколько достаточных признаков существования бесконечного множества рациональных точек на (1). Среди этих признаков наиболее просты следующие. Пусть (x, y) — рациональная точка на (1); $v(x) \neq$ логарифмическая норма (valuation) числа x по дивизору (2) в поле рациональных чисел. Тогда кривая (1) содержит бесконечное число рациональных точек, если, например, справедливо одно из следующих условий: 1) $v(x)v(y) \neq 0$, 2) $v(x) = v(y) = 0$, но $(x,y) \neq (\pm 1, \pm 1)$.

Кроме того, строится множество точек на плоскости, связанное с кривой (1), в которой попарные расстояния точек рациональны. Метод автора элементарен; сама работа является продолжением исследования Хаффа (Huff G. B., Duke Math. J., 1948, 15, 443—453). *Н. Г. Чудаков*

1630. Представление целых чисел рациональными бинарными формами. Голдберг, Ньюман, Страус, Свифт (The representation of integers by binary quadratic rational forms. Goldberg Karl, Newman Morris, Straus E. G., Swift J. D.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 12—18 (англ.)

Рассматривается вопрос о представлении целых чисел функцией

$$f(x, y) = (ax^2 + bxy + cy^2)/(p + qxy).$$

Накладывая некоторые ограничения на коэффициенты функции $f(x, y)$, автор показывает, что один класс таких функций представляет все элементы некоторой арифметической прогрессии, за исключением, самое большее, одного элемента. Другой же класс представляет лишь конечное число целых чисел, называемых автором исключительными значениями, если не принимать во внимание все целые числа вида as^2/p и cs^2/q, которые, очевидно, всегда представимы функцией $f(x, y)$.

Далее дается способ нахождения исключительных значений для некоторых форм частного вида. В заключение рассматриваются три примера. *Г. А. Ломадзе*

1631. Представления квадратичными формами в конечном поле. Карлиц (Representations by quadratic forms in a finite field. Carlitz L.), Duke Math. J., 1954, 21, № 1, 123—137 (англ.)

Пусть $q = p^n$, где p — нечетное простое число. Далее, пусть

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j,\ B(x) = \sum_{i,j=1}^{t} \beta_{ij} x_i x_j \qquad (1)$$

— квадратичные формы с коэффициентами из конечного поля $GF(q)$. Обозначим через $N_t(A, B)$ число линейных форм

$$u_i = \sum_{j=1}^{t} \xi_{ij} x_j \quad \left(i = 1, 2, \ldots, m;\ \xi_{ij} \in GF(q)\right) \qquad (2)$$

таких, что $A(u) = B(x)$. Следовательно, $N_t(A, B)$ также обозначает число матриц X, удовлетворяющих уравнению

$$X'AX = B,$$

где A и B — матрицы квадратичных форм (1), X — матрица линейного преобразования (2).

Если квадратичная форма $A(x)$ приводится к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i,$$

то положим $\delta(A) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$, аналогично определяется и $\delta(B)$.

Сначала автор находит выражение для $N_r(A, B)$. Так, например, в случае нечетного m и четного r

$$N_r(A, B) = q^{mr-r(r+1)/2} \prod_{i=1}^{r/2} (1 - q^{2i-m-1});$$

в остальных трех случаях получаются несколько более сложные выражения.

Затем автор получает выражение для $N_t(A, 0)$, а именно, в случае нечетного m

$$q^{t(t+1)/2-mt} N_t(A, 0) = {}_2\Phi_0\left[q^{-t/2},\ q^{-(t-1)/2};\ q^{(m-1)/2}\right]',$$

где

$${}_2\Phi_0[a, b; z] = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{r-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^r)} \times$$

$$\times (1-b)(1-bq)\cdots(1-bq^{r-1})\, z^r,$$

штрих означает, что в функции ${}_2\Phi_0 q$ нужно заме-

нить через q^{-2}; в случае четного m получается более сложное выражение.

Далее доказывается общая теорема:

Пусть A — неособенная симметрическая матрица порядка m, B — симметрическая матрица порядка t и ранга r, причем $r \leqslant m$, $r \leqslant t$. Тогда

$$N_t(A, B) = N_r(A, B^*)\, N_{t-r}(A_r, 0),$$

где A_r — неособенная симметрическая матрица порядка $m-r$ с $\delta(A) = \delta(B)\,\delta(A_r)$, B^* — неособенная симметрическая матрица порядка r с $\delta(B^*) = \delta(B)$.

Библиография, 10 названий. *Г. А. Ломадзе*

1632. Свойства сравнений специальных эллиптических функций. К а р л и ц (Congruence properties of special elliptic functions. C a r l i t z L.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 2, 77—90 (англ.)

Для эллиптического синуса Якоби $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x,u)$, $u = k^2$, известны соотношения: $\operatorname{sn} x = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{2n+1}(u) \times x^{2n+1}/(2n+1)!]$, $x/\operatorname{sn} x = \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_{2n}(u)\, x^{2n}/(2n)!]$, где $A_n(u)$ — полиномы с целыми коэффициентами, $\beta_n(u)$ — полиномы с рациональными коэффициентами. Для этих полиномов автором было ранее получено:

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, A_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m \geqslant r), \tag{1}$$

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, \tau_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m > r,\ \tau_m(u) = \beta_m(u)/m), \tag{2}$$

$$\beta_m(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (p^r \mid m,\ p-1 \nmid m), \tag{3}$$

$$A_p(u) \equiv (-1)^{(p-1)/2} W_p(u) \pmod{p},$$

$$W_p(u) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 u^s,\ p = 2m+1 \tag{4}$$

(РЖМат, 1953, 1050).

Сравнения (1), (2), (3), (4) понимаются таким образом, что в них сравнимы коэффициенты при одинаковых степенях переменного u. Очевидно, что эти сравнения останутся верными, если в них заменить u на любое целое рациональное или целое алгебраическое число. При этом, естественно, возникают дополнительные сравнения, не имевшие места, когда u было буквенным символом.

В одной из своих предшествующих работ (РЖМат, 1955, 39) автор рассматривает случай, когда отношение периодов эллиптической функции принадлежит мнимому квадратическому полю и когда $u = k^2$, где k — соответствующий модуль якобиевой функции $\operatorname{sn}(x,u)$.

В реферируемой работе автор полагает u равным корню уравнения $W_p(u) = 0$, $W_p(u) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 u^s$, $p = 2m+1$, и выводит различные сравнения для чисел $\alpha_n = A_n(u)$, $\beta_n = \beta_n(u)$, $\tau_n = \beta_n/n$. В частности, он получает:

$$\alpha_n \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (n > pr),$$

$$\tau_n \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (n > pr,\ p-1 \nmid n),$$

$$\beta_n \equiv 0 \pmod{p^{r+t}} \quad (n > pr,\ p-1 \nmid n,\ p^t \mid n).$$

Автор рассматривает разнообразные обобщения полученных им результатов.

В конце работы он находит связь между полиномами $W_p(u) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 u^s$ и полиномами Лежандра и исследует вопрос о факторизации полинома W_p по модулю p.

Библиография, 5 названий. *Н. П. Романов*

1633. О функции Селберга. Э д а (On Selberg's function. E d a Y o s h i k a z u), Proc. Japan. Acad., 1953, 29, № 8, 418—422 (англ.)

Доказываются неравенства:

$$\sum_{d \leqslant x,\ d \equiv \lambda(k)} \sum_{l \mid d} \mu(l) \log^n \frac{x}{l} = \frac{x}{k} V_n(x) + O(x), \tag{1}$$

где

$$V_n(x) = \sum_{d \leqslant x,\ (d,k)=1} \frac{\mu(d)}{d} \log^n \frac{x}{d} \text{ для } n = 0, 1, 2, \ldots$$

и

$$\frac{1}{n+1} V_{n+1}(x) = \frac{k}{\varphi(k)} \log^n x + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_{n+1,i} \log^i x + O(1) \tag{2}$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство основано на элементарных преобразованиях некоторых неравенств и является комбинацией методов Селберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, 50, 297—313) и Шапиро (Shapiro H. N., Ann. Math., 1951, 52, 485—497).

Неравенства (1) и (2) являются обобщенной формой известного неравенства Селберга

$$\frac{x}{k} V(x) = \sum_{p \leqslant x,\ p \equiv \lambda(k)} \log^2 p + \sum_{pq \leqslant x,\ pq \equiv \lambda(k)} \log p \log q + O(x),$$

где

$$V(x) = \sum_{d \leqslant x,\ (d,k)=1} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} = \frac{2k}{\varphi(k)} \log x + O(1),$$

использованного им для элементарного доказательства теоремы Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. Неравенства (1) и (2) автор дает в матричной форме. Чтение работы затрудняют неоднократные ссылки автора на результаты своей предыдущей статьи (Sci. Rept Kanazawa Univ., 1953, 2, 7—13), а также имеющиеся в статье опечатки. Замечены опечатки: 1) в неравенстве (2) (стр. 418) вместо $\frac{2k}{\varphi(k)} \log x + O(1)$ напечатано $\frac{2}{\varphi(k)} x \log x + O(x)$; 2) на стр. 418 вместо $(k, l) = 1$ должно быть $(k, \lambda) = 1$; 3) в рекуррентной формуле леммы 1 вместо $[k-i]^i$ должно быть $[k-1]^i$; 4) в

лемме 2 вместо $\binom{k}{i} = [k]!/i!$ должно быть $\binom{k}{i} = [k]^i/i!$; 5) в рекуррентной формуле леммы 3 вместо $f(j,k)$ и $f(j,i)$ должно быть $f(k,j)$ и $f(i,j)$; 6) на стр. 419 вместо $V(x) = \overline{E}^* L(d)$ должно быть $V(x) = \overline{E}^* L\left(\frac{x}{d}\right)$ и др. *Б. М. Бредихин*

1634. Теорема о натуральных числах N с $\sigma(N)=3N$. **Штейервальд** (Ein Satz über natürliche Zahlen N mit $\sigma(N)=3N$. Steuerwald Rudolf), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 449—451 (нем.)

Теорема. Если N кратно 6 и $\sigma(N)=3N$, где $\sigma(N)$ — сумма всех делителей N, то в каноническом разложении числа N одно из чисел 2 или 3 содержится в первой степени, а другое в степени не ниже второй.

Лемма. Диофантовы уравнения

$$2^{x_1} - 1 = 3^{x_2} p^{x_3}, \quad 3^{x_4} - 1 = 2^{x_5} p^{x_6},$$

где $x_i \geqslant 1$ $(i = 1, 3, 4, 5, 6)$, $x_2 \geqslant 0$, p — простое $\geqslant 5$, имеют только одно решение:

$$p = 5, \quad x_1 = x_4 = x_5 = 4, \quad x_2 = x_3 = x_6 = 1.$$

Обе теоремы доказываются с помощью одного результата Диксона (Dickson L. E., Amer. Math. Monthly, 1905, **12**, 86—89), находящегося в связи с вопросом о принадлежности чисел к показателю.

Из-за недостатка места автор приводит без доказательства следующий результат: среди чисел N, имеющих в каноническом разложении не более четырех простых, известные три числа $N_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $N_2 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$, $N_3 = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ суть единственные, удовлетворяющие условию $\sigma(N) = 3N$. *И. Г. Мельников*

1635. Несколько формул Олтрамара. **Карлиц** (Some formulas of Oltramare. Carlitz L.), Math. Mag., 1954, **27**, № 4, 189—194 (англ.)

Доказываются формулы, аналогичные формулам Олтрамара (Dickson L., History of the Theory of Numbers, Washington, 1919, vol. 1, 277).

Например, для простого $p = 2m + 1$:

1) $$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r} \equiv (-1)^{(p^2-1)/8} \pmod{p},$$

2) $$\sum_{r=0}^{m} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r}\right)^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p},$$

3) $$1 + 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 8}\right)^2 + \cdots\right\} \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod{p = 3m+1},$$

4) $$1 + 2\left\{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 4 \cdot 7}\right)^2 + \cdots\right\} \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod{p = 3m+2}$$

и др.

Э. Апарисио

1636. Об одной задаче Шура. **Шерешевский** (Über eine Aufgabe von Schur. Seres Ivan), Publs mathematicae, 1953, **3**, № 1—2, 138—139 (нем.)

И. Шур поставил следующую задачу: Если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — различные целые числа, то многочлен

$$F(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)^{2^n} + 1$$

при $n > 1$ неприводим над полем рациональных чисел.

Устанавливается справедливость предложения Шура в случае $m = 2$ при более общих предположениях, без требования $a_1 \neq a_2$.

Доказательство неприводимости получается путем перехода от равенства к сравнению по модулю 2. *И. Г. Мельников*

1637. Сингулярные формы четвертой степени. **Льюис** (Singular quartic forms. Lewis D. J.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 39—44 (англ.)

Сингулярной формой называется такая форма, все нули которой, лежащие в поле коэффициентов, являются одновременно нулями всех частных производных этой формы.

В реферируемой работе дается полная классификация всех сингулярных форм четвертой степени над конечным полем; автор находит, что существуют только три типа таких форм (структура этих типов указана в конце стр. 41).

С целью исследования указанного вопроса автор обобщил теорему Карлица о гомоморфизмах конечного поля (см. стр. 40). *Н. Г. Чудаков*

1638. Применение быстродействующих машин к последней теореме Ферма. **Лемер, Лемер, Вандивер** (An application of high-speed computing to Fermat's last theorem. Lehmer D. H., Lehmer Emma, Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 1, 25—33 (англ.)

Пусть l $(l > 2)$ — простое число,

$$x^l + y^l + z^l = 0, \tag{1}$$

x, y, z — отличные от нуля целые рациональные числа. Различают два случая уравнения (1):

$$(xyz, l) = 1, \quad (xyz, l) = l.$$

В 1941 году Д. и Э. Лемер (Lehmer D. H., Lehmer E., Bull. Amer. Math. Soc., 1941, **47**, 139—142) установили невозможность (1) в первом случае для всех $l \leqslant 253747899$.

Настоящая работа посвящается второму случаю уравнения (1). Если ни одно из чисел Бернулли

$$B_1 = 1/6, \quad B_2 = 1/30, \quad \ldots, \quad B_{(l-3)/2} \tag{2}$$

не делится на l, то l называется регулярным, в противном случае — иррегулярным. Енсен (Jensen, Nyt tidsskr. für mat. 1915, 82) доказал, что существует бесконечное множество иррегулярных простых чисел вида $4n + 3$. В статье дана таблица всех иррегулярных $l < 2000$. Если среди чисел Бернулли (2) имеются s чисел

$$B_{a_1}, B_{a_2}, \ldots, B_{a_s}, \tag{3}$$

делящихся на l, то l называют иррегулярным s-го порядка. Показано, что среди иррегулярных простых, не превосходящих 2000, содержится: 92 иррегулярных числа первого порядка, 18 иррегулярных чисел второго порядка, 7 иррегулярных чисел третьего порядка. Куммер доказал теорему Ферма для всех регулярных l. В настоящей статье доказывается

теорема: Если $Q_{a_i}^k \not\equiv 1 \pmod p$, $i = 1, 2, \ldots, s$, то уравнение (1) невозможно. Здесь $Q_a = t^{-kd/2} \times \times \prod_{b=1}^{\mu} (t^{kb}-1)^{b^{l-1-2a}}$, $t^k \not\equiv 1 \pmod p$, p — простое, вида $kl+1 < l^2-l$, $\mu = (l-1)'2$, $d = 1^{l-2a} + 2^{l-2a} + \cdots + \mu^{l-2a}$, a_i — индексы чисел Бернулли (3).

При помощи вычислительных машин СВАК (РЖМат, 1954, 3094) составлена таблица величин $Q_{a_i}^k$ для всех иррегулярных $l < 2000$. В результате применения упомянутой теоремы, установлена справедливость теоремы Ферма (оба случая) для всех показателей $l < 2000$.

Примечание референта. Проблема Ферма породила огромный поток работ различной значимости. Глубокие исследования проблемы Ферма способствовали возникновению и развитию теории алгебраических чисел. Дальнейшее развитие проблемы Ферма находится в связи с современной теорией полей классов. Таким образом, проблема Ферма сыграла положительную роль в развитии математических методов.

Многочисленные неудавшиеся попытки элементарного решения проблемы Ферма могут служить указанием на безнадежность дальнейших поисков простого доказательства.

Имеются основания предполагать, что Ферма решал не численную, а функциональную задачу, т. е. неизвестные x, y, z — не целые числа, а целые рациональные функции. Можно построить модель такого доказательства, согласованного с другими примечаниями Ферма к книге Диофанта.

П. Н. Реморов

1639. Исследование подхода ко второму случаю последней теоремы Ферма. Вандивер (Examination of methods of attack on the second case of Fermat's last theorem. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 8, 732—735 (англ.)

В работе путем применения тех же методов продолжена проверка теоремы Ферма (см. реф. 1638) и установлена ее справедливость для всех $l < 2521$. Приводится таблица иррегулярных простых l ($2003 \leqslant l \leqslant 2503$) и чисел Бернулли, делящихся на l.

Далее обсуждаются критерии разрешимости уравнения Ферма во втором случае. *П. Н. Реморов*

1640. Замечание к последней теореме Ферма. Грей (A note on Fermat's last theorem. Grey L. D.), Math. Mag., 1954, **27**, № 5, 274—276 (англ.)

Элементарно доказывается, что если

$$x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}, \qquad xyz \neq 0, \qquad (1)$$

p — нечетное простое, x, y, z — целые рациональные числа, взаимно простые с p, то p должно быть формы $24a+1$. *П. Н. Реморов*

1641. Теорема Ферма (Het theorema van Fermat), Linie, 1954, **9**, № 428, 13 (голл.)

Приводятся сведения об уравнении $x^n + y^n = z^n$ (n — целое > 2) в целых числах и сообщается, что при помощи счетных машин СВАК установлена справедливость теоремы Ферма для всех $n < 2000$.

П. Н. Реморов

1642. Диофантовы уравнения Брокара. Кавалларо (Equazioni diofantee brocardiane. Cavallaro Vincenzo G.), Giorn. mat. Battaglini, 1954, **82**, № 1, 301—308 (итал.)

Неопределенное уравнение

$$M(x^4 + y^4 + z^4) = N(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), \qquad (1)$$

где x, y, z — действительные числа, представляющие стороны неравностороннего треугольника, M и N — натуральные числа, называется диофантовым уравнением Брокара.

Устанавливается зависимость $\operatorname{tg}\omega$ (угла Брокара в треугольнике) от чисел M и N уравнения (1) в случаях: $M = 2, 5, 5, 65$ и соответственно $N = 3, 6, 8, 66$. *В. А. Голубев*

1643. Один метод решения диофантова уравнения $2x^2+1 = ay^2$ ($a = 2b^2+1$). Глодан (Une méthode de résolution de l'équation diophantienne $2x^2+1 = ay^2$, $(a = 2b^2+1)$. Gloden A.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, 195—196 (франц.)

1644. Заметка к теореме Вольстенхольма. Карлиц (A note on Wolstenholme's theorem. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 174—176 (англ.)

Известна теорема Вольстенхольма:
Если простое число $p > 3$, то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

В заметке доказываются сравнения:

$$1)\quad S_{k,p} = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \cdots + \frac{1}{kp+p-1} \equiv 0 \pmod{p^{e+2}},$$

где $p > 3$, k — любое целое, $p^e \mid (2k+1)$.

Для $p = 3$ имеем: $S_{k,3} \equiv 0 \pmod{p^{e+1}}$.

$$2)\quad S_{k,m} = \sum_{\substack{r=1 \\ (r,m)=1}}^{m} \frac{1}{km+r} \equiv 0 \pmod{(2k+1)m^2},$$

если $(m, 6) = 1$. *В. А. Голубев*

1645. Обобщение кратных совершенных чисел. Гарсия (A generalization of multiply perfect numbers. Garcia Mariano), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 209—210 (англ.)

Заметка посвящена задаче составления таблиц совершенных чисел и чисел N, для которых $\sigma(N) = kN$, где $\sigma(N)$ — сумма делителей N, $k > 0$ — целое. Пусть $H(n)$ — среднее гармоническое всех делителей n, тогда ясно, что если N — совершенное число, то $H(N)$ — целое число. Автором составлена таблица $n < 10^7$, для которых $H(n)$ — целое (РЖМат, 1955, 617).

Пусть $v(n)$ — число делителей n. Рассмотрим функцию $G(n) = \dfrac{\sigma(n)\,v(n)}{n}$; для чисел N, для которых $\sigma(N) = kN$, $k > 0$ — целое, $G(N) = kv(N)$ — целое. Указываются признаки чисел n, при которых

$G(n)$ — заведомо дробное число, и при каких n $G(n)$ может быть целым.

Дана таблица чисел $n < 12000$, для которых $G(n)$ — целое. *П. Н. Реморов*

1646. К проблеме простых чисел. Соукуп (K problému prvočísel. Soukup Jaroslav), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, **33**, № 5, 147—151 (чеш.)

Несколько общедоступных соображений о простых числах. *А. И. Попов*

1647. О натуральных числах. Седлачек (O přirozených číslech. Sedláček Jiří), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, **33**, № 4, 103—106 (чеш.)

Краткая заметка о некоторых элементарных свойствах натурального ряда. *А. И. Попов*

1648 К. Основы теории чисел. Виноградов (Elementy teorii liczb. Vinogradov Ivan M., 207 s., 1 nlb., Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk, 1954, sł. 14.80), Przew. bibliogr., 1954, **10**, № 29, 387 (библ.)

1649 Д. О приближении комплексных чисел. Пуату (Sur l'approximation des nombres complexes... Poitou Georges. Thèse présenté à la Faculté des sciences de l' Université de Paris, pour le grade de docteur des sciences mathématiques, 72 pp., Paris, Gauthier-Villars, 1954), Bibliogr. France, 1954, **143**, ч. 1, № 21, 486 (франц.)

См. также: 1671

АЛГЕБРА

1650. Одна задача из комбинаторики. Мендельсон (A problem in combinatorial analysis. Mendelsohn N. S.), Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. 3, 1953, **47**, 21—26 (англ.)

Пусть дано множество из $a+b+c+\ldots$ элементов, из них a одинаковых элементов одного рода, b одинаковых другого рода и т. д. Через $C_r[a, b, c, \ldots]$ обозначено число различных сочетаний этих элементов по r элементов в каждом. Автор употребляет краткое обозначение: вместо $C_r[a, a, a, b, b, c, \ldots]$ пишет $C_r[a^3, b^2, c, \ldots]$. Через $P_r[a, b, c, \ldots]$ обозначено число различных размещений по r элементов в каждом. Автор выводит следующие формулы: рекуррентная формула

$$C_r[a_1^{k_1}, \ldots, a_t^{k_t}] = \sum_{k=0}^{\min(r,\, a_t)} C_{r-k}[a_1^{k_1}, \ldots, a_t^{k_t-1}],$$

из которой могут быть выведены явные формулы для любого t; окончательная формула для $t=2$:

$$(*)\; C_r[a^i, b^j] = \sum_k \sum_m (-1)^{k+m} \binom{i}{k} \binom{j}{m} \times$$
$$\times \binom{i+j+r-1-(a+1)k-(b+1)m}{r-(a+1)k-(b+1)m};$$

здесь суммирование распространяется на все целые значения индексов k, m, для которых $0 \leqslant k \leqslant i$; $0 \leqslant m \leqslant j$, $0 \leqslant (a+1)k+(b+1)m \leqslant r$. Для размещений имеет место рекуррентная формула

$$P_r[a_1^{k_1}, \ldots, a_t^{k_t}] =$$
$$= \sum_{u=0}^{\min(r,\, a_t)} \binom{r}{u} P_{r-u}\left[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_t^{k_t-1}\right]$$

(сокращение $P_r[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_t^{k_t}]$ аналогично $C_r[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_t^{k_t}]$). *В. А. Ефремович*

1651. Заметка о комбинаторной формуле Мендельсона. Мозер (Note on a combinatorial formula of Mendelsohn. Moser Leo), Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. 3, 1953, **47**, 27 (англ.)

Автор дает прямое и весьма короткое доказательство формулы (*) Мендельсона (см. реф. 1650). *В. А. Е.*

1652 К. Основы абстрактной алгебры. Джонсон (First course in abstract algebra. Johnson Richard E., 8+257 pp., New York, Prentice-Hall, Inc. 1953, 5.50 doll.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 562 (библ.)

1653 К. Элементы алгебры. Кэрис (Elements of algebra. Caris Vaughn B., 5+307 pp., Boston, Ginn and Co., 1953, 3.30 doll.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 561 (библ.)

1654 К. Элементы алгебры. Феррар (Elemente der Algebra. Ferrar William Leonard, 220 S., Oldenbourg, München, 1953, 14.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1953, № 44, 1905 (библ.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1655. О разложении многочленов с помощью конечного числа шагов. Крулль (Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. Krull Wolfgang), Math. Z., 1953, **59**, № 3, 296—298 (нем.)

В предыдущей статье автора (РЖМат, 1954, 4739) был приведен пример бесконечной последовательности $K_1, K_2, \ldots$ мнимоквадратичных полей над полем K_0 рациональных чисел, обладающей следующим свойством (Z):

Для всякого многочлена

$$p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_n,$$

неприводимого над K_0, существует такая «конечно» вычисляемая (т. е. получающаяся с помощью конечного множества рациональных операций) граница $\nu^*(p(x))$, что многочлен $p(x)$ остается неприводимым над любым полем K_i, как только он неприводим над каждым полем $K_1, \ldots, K_{\nu^*(p(x))}$.

В настоящей статье доказываются две теоремы: Пусть $K_1, K_2, \ldots$ — бесконечная последовательность конечных алгебраических числовых полей над полем K_0 рациональных чисел.

Если дискриминанты D_i полей K_i $(i = 1,2, \ldots)$ попарно взаимно просты и наименьший простой множитель p_2, входящий в D_{i_2}, при $i_2 > i_1$ больше, чем наименьший простой множитель p_1, входящий в D_{i_1}, то последовательность $K_1, K_2, \ldots$ обладает свойством (Z).

Если каждое из полей K_i примитивно, т. е. ни для какого i не существует между K_0 и K_i промежуточного поля, и для любого n можно «конечно» вычислить такое $i_0(n)$, что абсолютная величина дискриминанта D_i поля K_i при $i > i_0(n)$ больше n, то последовательность $K_1, K_2, \ldots$ обладает свойством (Z). Это позволяет строить целый ряд последовательностей числовых полей, обладающих свойством (Z). *Л. Я. Окунев*

1656. Об одном приложении определителя Вандермонда. Фландерс (An application of the Vandermonde determinant. Flanders Harley), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 708 (англ.)

С помощью определителя Вандермонда довольно просто доказывается, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ все равны нулю, если равны нулю степенные суммы $\sum x_i, \ldots, \sum x_i^n$. *Л. Я. Окунев*

1657. Интересный определитель. Санкаран-Намбияр (An interesting determinant. Sankaran Nambiar P. P.), Math. Student, 1953, **21**, № 3, 4, 111—113 (англ.)

Рассматриваются определители $|c_{ij}|_k$ $(0 \leqslant i \leqslant k, 0 \leqslant j \leqslant k)$, элементы которых суть значения функции $f(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^{n-\nu}$, соответственно, при $t = x + h(i+j)$, т. е. $c_{ij} = f(x + h(i+j))$, и доказывается, что при $k = n$ величина такого определителя равна

$$|f(x + h(i+j))|_n = (-h^2)^{n(n+1)/2}(n!\,a_0)^{n+1}$$

А. Ф. Тиман

1658. Об алгебраически замкнутых абелевых группах. Гачаи (On algebraically closed abelian groups. Gacsályi S.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 292—296 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Полную абелеву группу A автор называет алгебраически замкнутой. В работе рассматриваются системы линейных уравнений

$$\{f_\mu(x) \equiv r_{\mu_1} x_{\nu_1} + \ldots + r_{\mu_k} x_{\nu_k} = c_\mu\}$$

с целыми рациональными коэффициентами и со свободными членами, являющимися элементами полной абелевой группы A. Множество уравнений и множество неизвестных не предполагается ни конечным ни упорядоченным, но предполагается, что в каждое уравнение входит лишь конечное число неизвестных. Система уравнений называется совместной, если из всякого соотношения $\sum_{i=1}^{l} s_i f_{\mu_i} = 0$ следует соотношение $\sum_{i=1}^{l} s_i c_{\mu_i} = 0$.

Доказывается, что всякая совместная система уравнений $\{f_\mu(x) = c_\mu\}$ $(c_\mu \in A)$ имеет решение $x_\nu = a_\nu \in A$.

Полученный результат обобщается на группы с областью операторов R, являющейся кольцом с единицей: Если A служит прямым слагаемым для всякой содержащей ее группы с тем же кольцом операторов R, то всякая совместная система уравнений $\{f_\mu = c_\mu\}$, где $c_\mu \in A$, имеет решение в группе A.

Наконец, из полученных результатов выводится, что всякая совместная система уравнений над телом F, содержащая любое кардинальное число уравнений и любое кардинальное число неизвестных, имеет решение в F. *А. П. Мишина*

1659. О произвольных системах линейных уравнений. Селе (On arbitrary systems of linear equations. Szele T.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 297—299 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматриваются совместные системы линейных уравнений над телом (см. реф. 1658).

Предполагается, что число уравнений и число неизвестных не обязательно конечно, но в каждое уравнение входит лишь конечное число неизвестных. Доказывается, что классические методы решения систем линейных уравнений применимы и в этом случае. *А. П. Мишина*

1660. Общее решение конечной системы линейных неравенств. Рубинштейн Г. Ш., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 2, 171—177

Опираясь на результаты статьи референта (РЖ Мат, 1953, 68), которая ниже цитируется под [1], автор получает для общего решения совместной системы линейных неравенств

$$L_j(x) - a_j \equiv a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0 \quad (1)$$
$$(j = 1,2, \ldots, m)$$

ранга r формулу

$$x = \sum_{i=1}^{t} \theta_i x^i + \sum_{i=1}^{n-r} c_i y^i + \sum_{i=1}^{\tau} d_i z^i, \quad (2)$$

в которой t — число различных минимальных граней в многограннике системы (1); $x^1, x^2, \ldots, x^t$ — точки, выбранные по одной на каждой из них; $y^1, y^2, \ldots, y^{n-r}$ — полная совокупность линейно независимых решений системы

$$L_j(x) = 0 \quad (j = 1,2, \ldots, m);$$

τ — число различных минимальных граней в многограннике системы

$$\begin{cases} L_j(x) \leqslant 0 \ (j = 1,2, \ldots, m), \\ \sum_{j=1}^{m} L_j(x) + 1 = 0; \end{cases}$$

$z^1, z^2, \ldots, z^\tau$ — точки, выбранные по одной на каждой из них; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t$ — неотрицательные числа, $\sum_{i=1}^{t} \theta_i = 1$; $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные вещественные числа; $d_1, d_2, \ldots, d_\tau$ — неотрицательные числа.

Если все неравенства системы (1) однородны

(т. е. если $a_j = 0$), то формула (2) принимает вид (теорема 2)

$$x = \sum_{i=1}^{n-r} c_i y^i + \sum_{i=1}^{\tau} d_i z^i. \qquad (3)$$

Частный случай этой формулы (при $n = r$) можно найти в статье референта (РЖМат, 1953, 67), где также указано линейное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы (1), при котором рассматриваемый частный случай формулы (3) превращается в формулу (3). Там же дается и метод построения общего решения системы (1), однако никакой формулы для него не выводится.

В реферируемой статье даются приложения формулы (2) к решению некоторых вопросов из работы [1]; из полученных при этом результатов наиболее существенным является ослабление достаточных условий неограниченности многогранника системы (1) (см. [1], теорема 10). *С. Н. Черников*

1661. Приведение некоторого типа матриц к диагональному виду. Бородянский М. Я., Тр. Киевск. технол. ин-та пищ. пром-сти, 1953, № 13, 195—196

Пусть A — симметрическая матрица, у которой элементы, лежащие на каждой из диагоналей, идущих сверху — направо вниз, равны. Показывается, что преобразование $P = VA\,V'$ приводит матрицу A к диагональному виду, где

$$V = \| v_{ik} \| \quad \begin{cases} v_{ik} = (-1)^{i(k-1)} & i = 1 \\ v_{ik} = \sin \dfrac{(i-1)(k-1)\pi}{n} & i = 3, 5, 7, \ldots \\ v_{ik} = \sin \dfrac{[n-2(i-2)(k-1)]\pi}{2n} & i = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

А. Ф. Голубчиков

1662. О некотором произведении матриц с заданными характеристическими корнями. Наглер (On a certain matrix product with specified latent roots. Nagler H.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, **10**, сер. 2, 21—24 (англ.)

Пусть задана $n \times m$ матрица A ранга r ($m \leqslant n$); требуется найти такую $m \times n$ матрицу B, чтобы k характеристических корней матрицы $M'M$ (где $M = E - AB$) были равны единице, а остальные $n - k$ корней были равны нулю. В статье Вайда (РЖМат, 1955, 1893) изучен случай, когда A и AB имеют максимальный ранг m.

Вначале автор рассматривает случай, когда первые k диагональных элементов матрицы $M'M$ равны единице, а остальные ее элементы равны нулю. Доказывается, что в этом случае для существования решения B необходимо и достаточно, чтобы первые $n - r$ строк матрицы A были линейно независимы от последних $n - k$ ее строк ($k \geqslant n - r$).

Затем подробно рассматривается случай $k = n - r$. Здесь матрица B может быть найдена из уравнений $A_1'AB = A_1'$, где A_1 — матрица, составленная из любых r линейно независимых столбцов матрицы A. B не зависит от выбора матрицы A. При $r = m$ решение $B = (A'A)^{-1}A'$ является единственным.

А. С. Монин

1663. Обобщенные таблицы Юнга. Уоллес (Generalised Young tableaux. Wallace Andrew H.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, **9**, сер. 2, 35—43 (англ.)

Пусть

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r \quad (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r)$$

есть разбиение целого положительного числа n на целые положительные слагаемые λ_i. Автор называет обобщенной таблицей Юнга (а также эшелонной или косой таблицей), соответствующей этому разбиению, таблицу из r строк, содержащих соответственно по λ_i элементов, причем под первым элементом каждой строки (кроме последней) находится один из элементов следующей строки (обычная таблица Юнга или квадрантная таблица получается в том случае, когда первые элементы всех строк находятся в одном столбце). Элементы таблицы представляют собой совокупность n символов, которые не обязательно все различны.

Пусть S_1 и S_2 — две эшелонные таблицы одной и той же формы и с элементами из одной и той же совокупности символов. Таблица S_1 называется преобразуемой в S_2, если можно подобрать такой же формы таблицу S, каждая строка которой состоит из тех же символов (вообще говоря, в другом порядке), что и соответствующая строка S_1, а каждый столбец — из тех же символов (также, возможно, в другом порядке), что и соответствующий столбец S_2.

Пусть для рассматриваемых символов выбран определенный порядок. Эшелонная таблица называется стандартной, если ни один символ не встречается дважды в одном и том же столбце и если порядок расположения символов не нарушается при чтении вдоль строки слева направо или вдоль столбца сверху вниз. Рассматриваются стандартные эшелонные таблицы некоторой определенной формы, причем символы, являющиеся элементами этих таблиц, перенумерованы с помощью чисел $1, 2, \ldots, m$ (допустимы повторения). Пусть S_i и S_j — две такие таблицы. S_i называется предшествующей S_j, если при лексикографическом упорядочении строк каждая строка S_i меньше соответствующей строки S_j. Теорема о преобразуемости: если S_i преобразуемо в S_j, то S_i не может предшествовать S_j.

Пусть U и X — эшелонные таблицы одной и той же формы, элементами которых являются m-членные векторы. Пусть $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) — векторы, заполняющие некоторый столбец U, и $x^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) — векторы, заполняющие соответствующий столбец X. Произведение определителей вида

$$|\, u^{(i)} x^{(j)} \,| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

($u^{(i)}x^{(j)}$ — скалярное произведение векторов $u^{(i)}$ и $x^{(j)}$), соответствующих всем столбцам U и X, обозначено через $\{U \mid X\}$. Через $\{U \sqcup X\}$ обозначена сумма всех $\{U \mid X\}$, получаемых при всевозможных перестановках символов в каждой строке таблицы U. Выведена формула

$$\{U \sqcup X\} = \sum_i c_i \{U \sqcup X_i\},$$

где X_i — стандартные эшелонные таблицы такой же формы, что и X, и с теми же символами в качестве

элементов; при этом значения констант c_i не зависят от U.

Путем использования некоторых матриц, связанных с эшелонными таблицами, исследуется вопрос о линейной независимости выражений вида $\{U \sqcup X\}$. Если X_i пробегает все стандартные эшелонные таблицы заданной формы с элементами из данной совокупности символов (рассматриваемых как независимые переменные), а U — некоторая таблица такой же формы с элементами из совокупности других символов (также рассматриваемых как независимые переменные), то выражения $\{U \sqcup X_i\}$ линейно независимы. Аналогичным образом определяемые выражения $\{U_i \sqcup X\}$ линейно независимы, если все элементы таблицы X различны.

В заключение кратко рассмотрены таблицы более общей формы. *В. К. Туркин*

1664 К. Лекции по линейной алгебре. Гельфанд (Перев. с русс.) (Linearni algebra. Gelfand I. M. Z. rus. orig. 228 S., Praha, Nakl. Čs. ak. věd., 1953, 22 Kčs.), Česka kniha, 1953, № 46, 911-912 (библ.)

1665 К. Руководство по матрицам. Нараян (A text book of matrices. Narayan Shanti, VII+289 pp., Delhi, S. Chand and Co., 1953) (англ.)

Вначале дается краткое описание групп, колец и полей. Матрица определяется как прямоугольная таблица чисел, и с этой точки зрения развита алгебра матриц. В главе III при помощи определителей вводится ранг матрицы и доказываются основные теоремы об эквивалентности матриц над произвольным полем. В следующей главе излагаются обычные результаты об ортогональном приведении симметрических и эрмитовых матриц над полем действительных и комплексных чисел. В последней главе продолжается теория подобия; получаются необходимые и достаточные условия приведения матрицы к диагональной форме.

Книга может оказаться полезной для тех, кто захочет познакомиться с вычислительными вопросами теории матриц. Достоинствами книги являются четкие формулировки определений и теорем, подробное решение числовых примеров, большое количество простых упражнений, а также хорошее оформление. Книга может быть использована в качестве сборника легких упражнений. *W. Givens*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 191

ГРУППЫ

1666. Свободное дифференциальное исчисление. I. Производные в свободном групповом кольце. Фокс (Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring. Fox Ralph H.), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 547—560 (англ.)

Излагается принадлежащая автору алгебраическая конструкция, возникшая при исследовании узлового инварианта, называемого многочленом Александера (Alexander J. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1928, **30**, 275—306). В введении указано, что в дальнейших частях статьи автор даст приложения свободного исчисления к некоторым алгебраическим и топологическим вопросам, в частности к проблеме изоморфизма групп, топологической классификации трехмерных линзовых пространств и теории узлов.

Пусть G — мультипликативная группа с единицей 1, а JG — ее целочисленное групповое кольцо. Сумма коэффициентов элемента $u \in JG$ обозначается через u°. Отображение D кольца JG в себя называется дифференцированием, если $D(u+v) = D(u) + D(v)$ и $D(uv) = D(u)\cdot v^\circ + u\cdot D(u)$ для любых $u \in JG$; $v \in JG$. Пусть X — свободная группа и $\{x_\alpha\}$ — множество ее образующих. Для каждой образующей x_α существует в JX единственное дифференцирование $D_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$, удовлетворяющее условиям: $D_\alpha x = \delta_{\alpha\beta}$. Далее существует единственное дифференцирование D, переводящее образующие $\{x_\alpha\}$ в произвольно заданные элементы $\{h_\alpha\}$. Оно дается формулой:

$$Df = \sum_\alpha (D_\alpha f)\cdot h_\alpha,\ f \in JX. \qquad (1)$$

Легко проверяется, что отображение $f \to f - f^\circ$ есть дифференцирование, переводящее x_α в $x_\alpha - 1$. Из этого на основании (1) получается формула

$$f = f^\circ + \sum_\alpha (D_\alpha f)\cdot(x_\alpha - 1). \qquad (2)$$

В качестве примера применения введенных понятий автор доказывает, что суммы показателей, с которыми образующая x_α входит в слово $u \in X$, равна $(D_\alpha u)^\circ$. Производные высших порядков вводятся индуктивно: $D_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1} f = D_{\alpha_n}(D_{\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1} f)$, $f \in JX$. Формула (2) дает возможность получить «тэйлоровское разложение» с остаточным членом для произвольного элемента $f \in JX$. Соответствующий бесконечный степенной ряд совпадает с разложением, ранее полученным Магнусом (Magnus W., Math. Ann., 1935, **111**, 259—280).

Пусть $G = G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$ — нижний центральный ряд группы G. Обозначим через $\mathfrak{G}$ фундаментальный идеал кольца JG, т. е. идеал, состоящий из всех $u \in JG$, для которых $u^\circ = 0$. Автор изучает последовательность $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \supset \mathfrak{G}^1 \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \ldots$ степеней идеала $\mathfrak{G}$ и связь ее с нижним центральным рядом группы G. Именно, элемент $g \in G$ тогда и только тогда принадлежит подгруппе G_n, когда $g - 1 \in \mathfrak{G}^n$. Из рассмотрения последовательности степеней фундаментального идеала автор получает ряд результатов об алгебраической структуре свободного группового кольца JX. В частности, доказывается, что каждый элемент кольца JX однозначно определяется соответствующим формальным бесконечным «рядом Тэйлора». Приведены более простые доказательства некоторых известных результатов, в частности принадлежащей Хигмену (Higman G., Proc. London Math. Soc., 1940, **46**, 231—248) теоремы о том, что групповое кольцо JX свободной группы X не имеет делителей нуля.

В работе приведено много соотношений, являющихся аппаратными формулами свободного исчисления. *В. Г. Болтянский*

1667. Свободное дифференциальное исчисление. II. Проблема изоморфизма групп. Фокс (Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups. Fox Ralph H.), Ann. Math., 1954, **59**, № 2, 196—210 (англ.)

Заметка содержит дальнейшее изучение операции дифференцирования в свободных группах (см. реф. 1666). Пусть $\mathbf{x} = \{x_\alpha\}$ и $\mathbf{a} = \{a_\beta\}$ — некоторые множества, а X и A — порожденные этими множествами свободные группы. Пусть далее $X * A$ — свободное произведение групп X, A и $\mathbf{r} = \{r_\gamma\}$ — подмножество группы $X * A$. Обозначим через R наименьший нормальный делитель группы $X * A$, содержащий $\mathbf{r}$, и положим: $G = X * A / R$, $F = AR/R$. Тогда F есть подгруппа группы G. Совокупность $(\mathbf{x}, \mathbf{a} : \mathbf{r})$ образующих и соотношений называется заданием (presentation) пары (G, F). Если множество $\mathbf{a}$ пусто, то обозначения $(\mathbf{x}, \mathbf{a} : \mathbf{r})$ и (G, F) сокращаются до $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ и G. Пара (G, F) называется конечно порожденной, если существует такое задание $(\mathbf{x}, \mathbf{a} : \mathbf{r})$ этой пары, в котором множества $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$ конечны. В работе рассматриваются только конечно порожденные пары. Если два задания определяют изоморфные пары, то от одного задания к другому можно перейти при помощи конечной цепочки элементарных (тицевских) преобразований. Обозначим через φ естественное гомоморфное отображение группы $X * A$ на группу G. Матрица $\| \varphi (\partial r_i / \partial x_j) \|$ называется якобиевой матрицей задания $(\mathbf{x}, \mathbf{a} : \mathbf{r})$; она содержит конечное число столбцов (равное мощности множества $\mathbf{x}$), но может иметь счетное число строк. Тицевским преобразованиям задания $(\mathbf{x}, \mathbf{a} : \mathbf{r})$ соответствуют элементарные преобразования якобиевой матрицы. Эти элементарные преобразования автор сводит к следующим: 1) перестановка строк или столбцов, 2) добавление строки, состоящей из одних нулей, 3) окаймление матрицы новой строкой и новым столбцом, на пересечении которых стоит 1, а остальные добавляемые элементы равны нулю, 4) прибавление к строке левой линейной комбинации других строк, 5) прибавление к столбцу правой линейной комбинации других столбцов. Если два задания определяют изоморфные пары, то их якобиевы матрицы эквивалентны (в смысле описанных элементарных преобразований).

Обозначим через H фактор-группу группы G по ее коммутанту. Если множество $\mathbf{a}$ пусто, то группа H однозначно определяется якобиевой матрицей задания группы G, именно матрица $\| (\varphi (\partial r_i / \partial x_j))^\circ \|$ является матрицей соотношений группы H. Обозначим через ψ гомоморфизм $JG \to JH$, порожденный естественным отображением $G \to H$. Матрица $\mathbf{A} = \| \psi\varphi (\partial r_i / \partial x_j) \|$ называется матрицей Александера для задания $(\mathbf{x}, \mathbf{a} : \mathbf{r})$. Элементарный идеал порядка d матрицы $\mathbf{A}$ (т. е. идеал, порожденный минорами $(n - d)$-го порядка матрицы $\mathbf{A}$, где n — число столбцов) обозначается через $\mathfrak{E}_d(\mathbf{A})$. Без труда доказывается (с использованием элементарных преобразований), что различные задания одной и той же пары (G, F) имеют одни и те же элементарные идеалы, так что можно положить $\mathfrak{E}_d(G, F) = \mathfrak{E}_d(\mathbf{A})$. Автор доказывает некоторые леммы об элементарных идеалах, позволяющие ему вычислить элементарные идеалы свободных и абелевых групп (с конечным числом образующих). (Лемма 4,4 и ее доказательство явно ошибочны. Ее, повидимому, нужно заменить следующим очевидным предложением: если N, F, G_2 — соответственно нормальный делитель, подгруппа и коммутант группы G, причем $N \subset F \cap G_2$, то $\mathfrak{E}_d(G/N, F/N) = \mathfrak{E}_d(G, F)$. Все остальные утверждения правильны. *Прим. реф.*)

Для идеалов нулевого и первого порядка приводится более подробное исследование. Нулевой элементарный идеал $\mathfrak{E}_0(G)$ однозначно определяется группой H. Именно $\mathfrak{E}_0(G)$ есть главный идеал кольца JH, порожденный элементом σ, где σ есть сумма всех элементов группы H, если она конечна, и $\sigma = 0$ в противном случае. О первом элементарном идеале автор доказывает две теоремы, из которых первая принадлежит Александеру (Alexander J. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1928, **30**, 275—306):

1) Если $H = \psi(G)$ есть свободная циклическая группа с образующей t и если F — подгруппа группы G, порожденная элементом g, для которого $\psi(g) = t^\lambda$, то $\mathfrak{E}_0(G, F) = \mathfrak{E}_1(G) \dfrac{t^\lambda - 1}{t - 1}$.

2) Если H есть свободная абелева группа ранга $\mu \geqslant 2$, то $\mathfrak{E}_1(G) = \mathfrak{D}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{D}$ — некоторый идеал, а $\mathfrak{H}$ — фундаментальный идеал кольца JH, причем, если F есть подгруппа группы G, порожденная элементом g, то $\mathfrak{E}_0(G, F) = \mathfrak{D}(\psi(g) - 1)$.

Пусть $H = \psi(G)$ есть свободная абелева группа ранга μ с образующими $t_1, \ldots, t_\mu$. Идеалом Александера называется при $\mu = 1$ идеал $\mathfrak{E}_1(G)$, а при $\mu \geqslant 2$ — идеал $\mathfrak{D}$. Если идеал Александера является главным, то его образующий элемент (определенный, конечно, только с точностью до множителя $\pm t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \ldots t_\mu^{\lambda_\mu}$) называется многочленом Александера группы G. Если группа G может быть определена таким заданием $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$, в котором число образующих больше числа соотношений (этому условию удовлетворяют, например, группы узлов) (РЖМат, 1953, 133), то идеал Александера является главным, т. е. может быть определен многочлен Александера.

В заключение указывается, что по якобиевой матрице произвольного задания группы G могут быть вычислены группы $H_n(G, \mathfrak{A})$ и $H^n(G, \mathfrak{A})$ гомологий и когомологий группы G. *В. Г. Болтянский*

1668. Гиперцентр группы. III. Бер (Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. Baer Reinhold), Math. Z., 1953, **59**, 299—338 (нем.)

Работа является непосредственным продолжением одноименных работ Бера, опубликованных ранее (РЖМат, 1954, 2524, 2525), и посвящена в основном изучению свойств групп, связанных со следующими двумя определениями:

1. Нормальный делитель N группы G — верхнегиперцентрален в G, если $(N/M) \cap Z(G/M) \neq 1$ для каждого нормального делителя M группы G, содержащегося в N и от N отличного ($M < N$).

Через $Z(H)$ обозначается центр группы H.

2. Нормальный делитель N группы G — гиперцентрален в G, если для каждой подгруппы U из G и для каждого нормального делителя V из U с конечным индексом $[U : V]$ имеет место следующее свойство: $(U \cap N)V/V$ — гиперцентральный нормальный делитель (в обычном смысле) конечной группы U/V.

Если $N = G$, т. е. если группа G является своим верхним гиперцентральным (просто гиперцентральным) нормальным делителем, то она называется верхненильпотентной (обобщенно нильпотентной).

Ввиду предложения референта о нетривиальности пересечения произвольного нормального делителя ZA-группы (т. е. группы с верхним центральным рядом) с ее центром (Матем. сб., 1948, 22(64),

№ 2, 319—348), класс верхненильпотентных групп совпадает с классом ZA-групп. Поэтому везде ниже верхненильпотентные группы мы называем ZA-группами.

Результаты, содержащиеся в реферируемой работе, в основном относятся к конечно порожденным группам (т. е. к группам с конечным числом образующих).

В частности, в первой части работы (введение и §§ 1—2) содержатся следующие предложения о такого рода группах:

1. Конечно порожденные ZA-группы удовлетворяют условию максимальности для подгрупп.

2. Если G — конечно порожденная ZA-группа, то существует такое натуральное число n, что пересечение всех ее характеристических подгрупп индекса p^α с $\alpha \leqslant n$ равно единице.

3. Если G — конечно порожденная группа, то следующие ее свойства эквивалентны: а) $\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iG = 1$; б) пересечение всех нормальных делителей X с конечной нильпотентной фактор-группой G/X равно единице. Здесь под ${}^iG$ понимается подгруппа группы G, определяемая следующим рекуррентным условием: ${}^0G = G$, ${}^{i+1}G = [G, {}^iG]$, где $[G, {}^iG]$ — группа, порожденная всеми коммутаторами $a^{-1}b^{-1}ab$ при $a \subset G$ и $b \subset {}^iG$.

4. Каждая конечно порожденная ZA-группа обладает характеристической подгруппой без кручения, имеющей в ней конечный индекс.

5. Конечно порожденная группа G тогда и только тогда является ZA-группой, когда она обобщенно нильпотентна и разрешима.

Следует отметить, что первое из этих предложений содержится в более общем результате В. М. Глушкова о локально нильпотентных группах (Матем. сб., 1952, 30(72), № 1, 79—104, стр. 86 и 87).

При доказательстве пятого предложения используется теорема:

Расширение абелевой группы с помощью конечно порожденной ZA-группы тогда и только тогда является ZA-группой, когда оно обобщенно нильпотентно.

В §§ 3—4 реферируемой работы к характеристике верхнегиперцентральных и просто гиперцентральных нормальных делителей привлекается следующее обобщение классической подгруппы Фраттини:

Если U — какая-нибудь подгруппа группы G и N — произвольный нормальный делитель последней, то через $\Phi(N, U)$ обозначается пересечение всех максимальных подгрупп конечного индекса из U, не содержащих пересечение $U \cap N$. Если, в частности, $N = U = G$, то группа $\Phi(G, G)$ обозначается через $\Phi^1(G)$; последняя в случае конечных групп совпадает с подгруппой Фраттини.

Доказано, что:

1. Нормальный делитель N группы G тогда и только тогда гиперцентрален, когда для каждой подгруппы U из G удовлетворяется соотношение

$$[U, U] \subseteq \Phi(N, U).$$

2. Конечно порожденный нормальный делитель N группы G тогда и только тогда верхнегиперцентрален, когда он гиперцентрален и когда $\Phi_k^l(N) = 1$ для достаточно большого k.

Здесь $\Phi_0^l(N) = N$, $\Phi_{i+1}^l(N) = \Phi^l[\Phi_i^l(N)]$.

В § 5 доказывается, что для верхнегиперцентрального нормального делителя N эквивалентны друг другу следующие свойства: а) группа N конечно порождена, б) группа N удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, в) группа N удовлетворяет условию максимальности для содержащихся в ней нормальных делителей группы G.

Это предложение является перенесением соответствующих результатов отмеченной выше работы В. М. Глушкова (см. стр. 86 и 87 его работы) на верхнегиперцентральные нормальные делители.

В § 5 это предложение распространяется на группы с операторами при условии, что область операторов каждой рассматриваемой группы G совпадает с некоторой подгруппой Γ группы автоморфизмов группы G, охватывающей G: $\Gamma \supseteq G$.

В § 6 реферируемой работы даются условия, при которых группа G будет конечной нильпотентной группой, а также устанавливаются некоторые свойства конечных гиперцентральных нормальных делителей.

Последний параграф работы автора содержит некоторые признаки верхней гиперцентральности нормальных делителей. *С. Н. Черников*

1669. О метабелевых группах. Цубои (Note on metabelian groups. Tsuboi Teruo), Sci. Rep. Saitama Univ., 1953, A2, 59—62 (англ.)

Для группы G порядка p^n с абелевым нормальным делителем A индекса p Туан (Tuan, Acad. Sinica Sci. Record, 1950, 3, 17—23) доказал, что $A/(A \cap Z_i) \simeq G_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, c$, где Z_i — i-й член возрастающего центрального ряда группы G, G_{i+1} — $(i+1)$-й член нижнего центрального ряда G и c — класс G. Автор доказывает, что то же верно для произвольной, не обязательно конечной группы G, если A — ее абелев нормальный делитель с конечной циклической фактор-группой G/A. (В статье слово «циклическая» в формулировке теоремы 2 пропущено).

Для доказательства этого показывается, что при фиксированном элементе s из смежного класса, порождающего группу G A, отображение $x \to f(x) = [x, s, s, \ldots, s]$ является гомоморфизмом A на G_{i+1} (здесь $[x, s, s, \ldots, s]$ — $(i+1)$-кратный коммутатор). *F. Haimo*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 196.

1670. Об определении транзитивных подгрупп и нормальных делителей группы G_S, где S — произведение двух циклов одного порядка. Руссо (Sulla determinazione dei sottogruppi transitivi e transitivi normali del gruppo G_S con la S prodotto di due cicli dello stesso ordine. Russo Salvatore), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 213—219 (итал.)

Исследуется вопрос о возможных типах транзитивных подгрупп и нормальных делителей группы G_S, являющейся нормализатором (относительно симметрической группы степени $2r$) подстановки $S = (u_1 u_2 \ldots u_r)(u_{r+1} u_{r+2} \ldots u_{2r})$. Пусть $C_1 = (u_1 u_2 \ldots u_r)$, $C_2 = (u_{r+1} u_{r+2} \ldots u_{2r})$, $S_{hk} = C_1^h C_2^k$ $(h, k =$

$= 0, 1, \ldots, r-1$) и пусть T_{hk} — подстановка, которая последовательность

$$u_1, u_2, \ldots, u_r \qquad (1)$$

переводит в последовательность, получаемую из

$$u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{2r} \qquad (2)$$

посредством подстановки C_2^h, а последовательность (2) — в последовательность, получаемую из (1) посредством подстановки C_1^k.

Доказаны следующие три теоремы:

а) Пусть k — делитель числа r, отличный от r; N и N_1 — целые неотрицательные числа, меньшие, чем r. Тогда $2rk$ подстановок

$$S_{\nu,\ N\nu+m\mu},\ T_{\nu,\ N\nu+m\mu+N_1}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, r-1;\ \mu = 0, 1, \ldots, k-1),$$

где $m = r/k$, в том и только в том случае составляют транзитивную подгруппу группы G_S, если числа N^2-1 и $(N-1)N_1$ делятся на m.

б) Всякая транзитивная подгруппа группы G_S имеет такую структуру.

в) Эта подгруппа инвариантна в том и только в том случае, если $N+1$ делится на m.

В качестве примера рассмотрен случай $r = 2$.

В. К. Туркин

1671. О двух теоремах Зигеля. Куга (On two theorems of Siegel. Kuga Michio), Scient. Papers Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, 1953, **3**, № 1, 1—11 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа всех действительных унимодулярных $n \times n$-матриц, Γ — ее подгруппа, составленная из всех матриц элементы которых — целые числа, $\Gamma \backslash \mathfrak{G}$ — пространство, образованное всеми правыми смежными классами. Далее через V в работе обозначается множество действительных симметрических $n \times n$-матриц, через Λ — его подмножество, состоящее из матриц с целыми элементами, и через Λ_1 — подмножество Λ, составленное из неособенных матриц.

Пусть, кроме того, $f(\xi)$ — непрерывная функция матриц $\xi \in V$, равная нулю вне некоторого компактного множества. Тогда

$$\psi(\mathfrak{X}) = \sum_{\mathfrak{S} \in \Lambda_1} f(\mathfrak{S}[\mathfrak{X}]),\ \mathfrak{X} \in \mathfrak{G},\ \mathfrak{S}[\mathfrak{X}] = \mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X},$$

есть непрерывная функция, определенная на пространстве $\Gamma \backslash \mathfrak{G}$. Автор устанавливает, что при $n \geqslant 3$ интеграл от функции $\psi(\mathfrak{X})$ по всему множеству $\Gamma \backslash \mathfrak{G}$ сходится. Аналогичный результат дается (без доказательства) и для кососимметрических матриц (при любом n).

Доказательство первой из указанных теорем основано на двух леммах: 1) пусть G — группа, состоящая из $n \times n$-матриц над полем K характеристики нуль. Если каждый элемент группы G имеет порядок $< N$, то G — конечная группа, порядок которой не превышает некоторого числа, зависящего только от n и N; 2) если $X = n \times n$-матрица конечного порядка с рациональными элементами, то ее порядок (как элемента группы) не может быть выше некоторого числа, зависящего только от n.

На основе установленного даются новые доказательства для следующих результатов Зигеля: 1) полная мера пространства $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}} \backslash \Omega_{\mathfrak{S}}$ конечна, исключая тот случай, когда $n = 2$ и $\det \mathfrak{S}$ есть полный квадрат. Здесь $\mathfrak{S} \in \Lambda_1$, $\Omega_{\mathfrak{S}}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, образованная всеми матрицами, которые оставляют неизменной отвечающую матрице $\mathfrak{S}$ квадратичную форму, $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}} = \Omega_{\mathfrak{S}} \cap \Gamma$ (Siegel C. L., Abh. Sem. Hamburg, 1940, **13**, 209—239); 2) аналогичное утверждение для кососимметрических матриц; 3) число классов определенных симметрических матриц с данным детерминантом конечно (класс матрицы $\mathfrak{S}$ состоит из всех матриц $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$, $\mathfrak{U} \in \Gamma$) (Siegel C. L., Amer. J. Math., 1943, 65, 1—86). *Г. Б. Гуревич*

1672. К теории периодических полугрупп. Шварц Штефан, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 1, 7—21 (резюме англ.)

Пусть S есть периодическая полугруппа, т. е. множество, в котором определено ассоциативное умножение, причем для каждого $x \in S$ среди $x, x^2, x^3, \ldots$ лишь конечное число элементов различно. Если e есть некоторый идемпотент S, то через $K^{(e)}$ обозначается множество всех таких элементов $x \in S$, для которых $x^m = e$ при некотором m. Рассматриваются некоторые свойства $K^{(e)}$, в частности вопрос о максимальных подполугруппах, содержащихся в $K^{(e)}$. Если S коммутативна или вполне некоммутативна (т. е. $ee' \neq e'e$ для всяких идемпотентов $e \neq e'$), то $K^{(e)}$ сама является полугруппой. $eK^{(e)} = K^{(e)}e$ является группой, причем такой, которая содержит все прочие группы, содержащиеся в $K^{(e)}$.

Для коммутативной периодической полугруппы рассматривается связь между $K^{(e)}$- и F-классами, т. е. совокупностями элементов, у которых содержащие их минимальные двусторонние идеалы одинаковы. *Е. С. Ляпин*

1673. О максимальных идеалах в теории полугрупп. I. Шварц Штефан, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 2, 139—153 (резюме англ.)

S есть полугруппа. Пусть $S' \subset S$. Если при любых $x \in S$, $y \in S'$ всегда $xy \in S'$, то S' называется левым идеалом, если всегда $xy \in S'$, то — левым антиидеалом. Если среди левых идеалов S, отличных от S, имеется такой, который содержит все остальные, то он обозначается через L^*.

Пусть в S существует L^* и не имеется левых антиидеалов. Тогда $T = S - L^*$ есть полугруппа. Если при этом L^* является двусторонним идеалом, то в T уравнение $xt_1 = t_2$ имеет решение при любых $t_1, t_2 \in T$. В частности, если S периодична (см. реф. 1672),то L^* есть двусторонний идеал, а T есть сумма непересекающихся изоморфных между собою групп. Особо автор останавливается на случае обрыва в S возрастающих цепочек левых идеалов.

Аналогично проводится рассмотрение для правых и двусторонних идеалов. *Е. С. Ляпин*

1674. Группы как группоиды с одним законом. Хигман, Нейман (Groups as groupoids with one law. Higman Graham, Neumann B. H.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 215—221 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Алгебраическая система, замкнутая относительно одной бинарной операции, называется группоидом. Совокупность всех группоидов, удовлетворяющих некоторому фиксированному множеству законов, т. е. тождественных соотношений, называется многообразием группоидов. Известно, что группы являются многообразием группоидов (задаются тремя операциями. См. Garver Raymond, Amer. J. Math., 1935, 57, 276—280). Аналогично определяется многообразие групп.

Опираясь на работу Лоренцена (Lorenzen P., J. reine und angew. Math., 1940, 182, 50), авторы доказывают, что всякое многообразие групп, допускающее задание конечным числом законов как подмногообразие многообразия групп, может быть определено единственным законом как подмногообразие многообразия группоидов. В частности, многообразие всех групп задается единственным законом:

$$xxzyp\,yzpxxpxpzppp = y.$$

Здесь используется бесскобочная запись результата бинарной операции над элементами a, b (в данном порядке) как abp. Для задания многообразия абелевых групп указан один более простой закон:

$$xyzpyxppp = z.$$

В заключение формулируются нерешенные вопросы. *Ю. И. Соркин*

1675 Д. О системах аксиом, определяющих абстрактную группу. Штольт (Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Stolt Bengt, 99 pp., Thesis, University of Uppsala, 1953) (нем.)

Отношение $xy=z$ обобщено на тернарное отношение $xy\supset z$, подчиненное условию ассоциативности. Рассматриваются аксиомы, утверждающие существование или единственность произведения, левого и правого частного, идемпотентов, левых и правых единиц, левых и правых единиц для отдельного элемента, левых и правых обратных элементов относительно этих различных видов единиц. Среди этих аксиом определены системы, характеризующие группу. *R. C. Lyndon*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 99.

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

1676. Об одной гипотезе Хассе. Фаддеев Д. К., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 1013—1016

Хассе (Hasse H., Math. Nachr., 1948, 1, № 1, 40—61) вывел некоторое условие, необходимое для погружаемости нормального поля k в нормальное поле K. Там же Хассе высказал гипотезу о том, что это условие не только необходимо, но и достаточно. В ряде последующих работ учеников Хассе, называющих эту гипотезу Хассе «die Hassesche Vermutung», был сделан ряд попыток ее доказать. Автор указывает, что: 1) условие Хассе совпадает с тем необходимым условием погружаемости, которое дано автором в совместной работе референта и автора (Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Матем. сб., 1944, 15 (57), № 2, 243—276) и 2) дает пример, показывающий, что это условие недостаточно, чем опровергает гипотезу Хассе. *Б. Н. Делоне*

1677. Бесконечные алгебраические расширения полей с мультипликативным соотношением. Жаффар (Extensions algébriques infinies de PF-corps. Jaffard Paul), Ann. scient. École norm. supér., 1953, 70, № 2, 181—198 (франц.)

Поле k называется полем с мультипликативным соотношением, если в нем существует такое множество нетривиальных и неэквивалентных метрик $\varphi_\alpha(x)$, что

1) для любого $x \in k$, $x \neq 0$, $\varphi_\alpha(x) = 1$ для всех φ_α, кроме конечного числа, причем $\prod_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$,

2) среди φ_α содержится хоть одна метрика, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:

а) φ_α архимедова,

б) φ_α дискретна и имеет конечное поле классов вычетов,

в) φ дискретна и ее поле классов вычетов является конечным расширением поля, состоящего из тех x, для которых $\varphi_\alpha(x) = 1$ при всех φ_α.

Артин и Уэйплс показали (Artin E., Whaples G., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 469—492), что полями с мультипликативным соотношением являются конечные расширения поля рациональных чисел, поля рациональных функций над произвольным полем и только они.

В работе рассматриваются бесконечные расширения полей с мультипликативным соотношением. Пусть Ω/k — такое расширение и $k \subset K \subset \Omega$, причем K/k конечно. Назвав окрестностью простого дивизора $\mathfrak{P}$ поля Ω совокупность таких дивизоров $\mathfrak{q}$, что $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{q}$ порождают в K один и тот же дивизор, мы превратим множество $\mathfrak{M}$ всех простых дивизоров Ω в топологическое пространство, которое локально компактно и имеет униформную структуру.

Автор вводит в множество $\mathfrak{M}$ меру и показывает, что бесконечные расширения поля рациональных чисел и поля рациональных функций характеризуются некоторым обобщением аксиом Артина—Уэйплса. Соотношение $\prod_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ заменяется условием равенства нулю интеграла от логарифма надлежащим образом нормированной функции $\varphi_\alpha(x)$. При этом x фиксировано, $\varphi_\alpha(x)$ рассматривается как функция от α и интеграл берется по множеству всех α, которое предполагается снабженным мерой. *И. Р. Шафаревич*

1678. Об алгебраических уравнениях со сверхразрешимыми группами Галуа. Пермутти (Sulle equazioni algebriche a gruppo di Galois supersolubile. Permutti Rodolfo), Ricerche mat., 1953, 2, 26—46 (итал.)

Продолжая свою работу об уравнениях со сверхразрешимыми группами Галуа (Giorn. mat. Battaglini, 1951, 4 (80), № 4, 159—185), автор рассматривает группу Галуа (относительно основного поля K) уравнения $f(x) = 0$, корнями которого являются все выражения вида

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

где t_i пробегает все значения, получаемые исключением $t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i,\nu_i-1}$ из уравнений

$$t_i^{p_{i\nu_i}} = a_{i\nu_i} + t_{i,\nu_i-1},$$

$$t_{i,\nu_i-1}^{p_{i,\nu_i-1}} = a_{i,\nu_i-1} + t_{i,\nu_i-2}, \ldots, t_{i2}^{p_{i2}} = a_{i2} + t_{i1},\ t_{i1}^{p_{i1}} = a_{i1}.$$

Здесь p_{ij} ($i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,\nu_i$) являются простыми числами, а a_{ij} — «общими» элементами поля K. Предполагается, что K содержит все корни p_{ij}-й степени из единицы и что характеристика K либо равна 0, либо взаимно проста со всеми p_{ij}.

Показано, что группа Галуа уравнения $f(x)=0$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда для любого i либо α) $p_{i1} = p_{i2} = \ldots = p_{i\nu_i}$, либо β) $p_{i2} = p_{i3} = \ldots = p_{i\nu_i}$, и p_{i2} делит $p_{i2} - 1$. Далее автор рассматривает уравнения, корни которых имеют вид

$$(a_0 + a_1^{1/q_1} + a_2^{1/q_2} + \ldots + a_\nu^{1/q_\nu})^{1/p},$$

и находит необходимые, а в некоторых случаях и достаточные условия того, чтобы соответствующая группа Галуа была сверхразрешимой. *W. Ledermann*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3. 191.

1679. Заметка о теории размерности колец. Зейденберг (A note on the dimension theory of rings. Seidenberg A.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 505—512 (англ.)

Изучается связь между размерностью области целостности O и размерностью кольца многочленов $O[x]$. Доказываются следующие теоремы:

1. Если размерность O равна n, то размерность $O[x]$ не меньше $n+1$ и не больше $2n+1$.

2. Если размерность O равна n, а размерность $O[x]$ отлична от $n+1$, то хотя бы для одного минимального простого идеала p из O либо размерность кольца $O_p[x]$ отлична от 2, либо кольцо O/p m-мерно, а размерность $O/p[x]$ отлична от $m+1$, $m < n$.

Этим вопрос о существовании «неправильных» колец (для которых при переходе к кольцу многочленов размерность повышается более чем на 1) сводится к вопросу о существовании «неправильных» колец размерности 1. Далее доказывается:

3. Если O — «неправильное» кольцо размерности 1, то таким же будет кольцо частных хотя бы по одному простому идеалу из O, а также целое замыкание $\overline{O}$ для O.

Отсюда получается следующий основной результат:

Если размерность кольца O равна 1, то кольцо $O[x]$ имеет размерность 2 тогда и только тогда, когда любое кольцо частных целого замыкания для O будет кольцом нормирования.

Из доказанного следует, в частности, что для колец с обрывом возрастающих цепей идеалов при переходе к кольцам многочленов размерность повышается точно на единицу; это было доказано ранее Круллем (Krull W., Math. Z., 1951, **54**, 354—387). Доказывается, что для одномерного кольца O, построенного Круллем (Math. Z., 1936, **41**, 670), при переходе к $O[x]$ размерность повышается более чем на 1.

В конце работы формулируются следующие утверждения:

1. Если размерность O равна 1, а размерность $O[x]$ равна 2, то размерность $O[x_1, \ldots, x_n]$ равна $n+1$.

2. При любом n существуют кольца O размерности n, для которых размерность $O[x]$ равна любому заданному числу m в интервале $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$.

Доказательства этих утверждений автор предполагает опубликовать в последующей работе.

А. И. Узков

1680. Радикалы колец и алгебр. Курош А. Г., Матем. сб., 1953, **33**(75), № 1, 13—26

Строится общая теория радикала в кольцах и выясняется, какое место занимают в этой теории введенные разными авторами и в разное время другие понятия радикала.

Рассматривается класс колец K (возможно, операторных), содержащий вместе с каждым кольцом все его идеалы и фактор-кольца. В K выделяется некоторое подмножество колец S (S-колец), называемых радикальными. S должно удовлетворять следующим условиям:

I. 1. Гомоморфный образ S-кольца есть S-кольцо.

I. 2. Во всяком кольце R из K существует максимальный S-идеал J (т. е. идеал, являющийся S-кольцом и содержащий все другие S-идеалы).

I. 3. R/J полупросто (т. е. не содержит S-идеалов).

Класс S колец, которые могут быть радикальными при некотором определении радикала, может быть охарактеризован также свойствами I. 1 и

II. 2. Всякое кольцо, любой гомоморфный образ которого содержит ненулевой S-идеал, является S-кольцом.

Радикал в кольцах можно также ввести, выделив класс M полупростых колец; при этом все кольца R из M обладают свойствами:

III. 1. Всякий идеал кольца R можно гомоморфно отобразить на кольцо из M.

III. 2. Если кольцо R обладает свойством III. 1, то оно принадлежит M.

В принципе исчерпывающе решается вопрос о распространении на более широкий класс колец L определенного в классе K понятия радикала. Именно, если в L определен T-радикал, то он естественным образом индуцирует некоторый S-радикал в более узком классе K. Обратно, всякий радикал, определенный в K, индуцируется некоторым радикалом T, определенным в L. При этом T определяется в L, вообще говоря, неоднозначно; указываются методы построения «наибольшего» и «наименьшего» среди таких радикалов. В применении к классу K_1 всех простых колец, содержащихся в классе колец K, получается следующее:

Пусть дано произвольное разбиение всех простых колец из K на два класса (условно — верхний и нижний); тогда существует хотя бы один радикал, соответствующий этому разбиению, т. е. радикал, для которого простые кольца верхнего класса полупросты, а простые кольца нижнего класса радикальны. Среди таких радикалов существует наибольший (или верхний) и наименьший (или нижний). Верхний радикал может не совпадать с нижним. Например, в классе всех ассоциа-

тивных колец при любом разбиении простых колец верхний и нижний радикалы не совпадают.

Изучается связь развитой здесь теории с уже известными радикалами. Так, если при разбиении простых колец все нулевые простые кольца (т. е. простые кольца с нулевым умножением) попадают в нижний класс, а все тела и кольца матриц над ними — в верхний, то в классе ассоциативных колец с условием минимальности будет индуцироваться классический радикал. Радикалы Бера (кольцо радикально, если как оно само, так и все его фактор-кольца содержат нильпотентные идеалы) и Левицкого (локально нильпотентные кольца) соответствуют разбиению простых колец, при котором нижний класс состоит только из нулевых простых колец. Без должного обоснования то же самое утверждается в работе о радикале Кётэ (радикальными являются ниль-кольца); это связано с еще нерешенным вопросом о существовании простых ниль-колец. Радикал Брауна-Маккоя совпадает с верхним радикалом такого разбиения простых колец, при котором верхний класс состоит из всех простых колец с единицей. *В. М. Курочкин*

1681. Структуры идеалов и строение колец. Блэр (Ideal lattices and the structure of rings. Blair Robert L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 1, 136—153 (англ.)

Известно, что все (правые) идеалы кольца A образуют полную дедекиндову структуру. Автор исследует строение кольца A при различных дополнительных предположениях о структуре L (или L_r) его идеалов (или правых идеалов). Следующие результаты наиболее интересны:

L есть структура с дополнениями в том и только том случае, если A разлагается в прямую сумму простых (возможно, и нулевых) колец (теорема 2). Если в A нет при этом левых аннуляторов, то L — булева алгебра (теорема 9). L_r есть структура с дополнениями тогда и только тогда, когда A разлагается в прямую сумму квазипростых колец, т. е. колец, являющихся суммами A-изоморфных минимальных правых идеалов (теорема 7).

Кольцо A называется f-регулярным, если $a \in (a)^2$ для любого элемента $a \in A$ (обобщение вводившихся раньше понятий регулярности, бирегулярности, слабой и сильной регулярности). Кольцо f-регулярно тогда и только тогда, когда каждый его идеал является пересечением всех содержащих его простых идеалов. У таких колец структура L дистрибутивна. Необходимым и достаточным условием дистрибутивности структуры $L(L_r)$ является возможность представить любой (правый) идеал кольца A в виде пересечения всех содержащих его сильно неприводимых (правых) идеалов (теорема 21). Здесь идеал I называется сильно неприводимым, если из $B \cap C \subset I$ следует $B \subset I$ или $C \subset I$ (B, C — идеалы). Если у полупростого кольца A структура L_r дистрибутивна, то A изоморфно подпрямой сумме тел (теорема 16), если же L_r — булева алгебра, то A — прямая сумма тел (теорема 17).

Ряд результатов относится к структурным пространствам кольца A, к цоколю и максимальному регулярному идеалу, к понятию неприводимости.

В. М. Курочкин

1682. Дополнительные замечания к соотношениям Шура для алгебры Фробениуса. Осима (Supplementary remarks on the Schur relations for a Frobenius algebra. Osima Masaru), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 24—28 (англ.)

Продолжение предыдущей работы автора (Osima M., J. Math. Soc. Japan 1952, 4, № 1, 1—13). Рассматривается алгебра Фробениуса A над алгебраически замкнутым полем K. Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = \bar{A} + N$ полупростой алгебры $\bar{A}$ и радикала N; $\bar{A} = \bar{A}_1 + \ldots + \bar{A}_n$ есть разложение полупростой алгебры $\bar{A}$ в прямую сумму простых алгебр $\bar{A}_\lambda$, матричные единицы которых обозначаются через $e_{\lambda,\alpha\beta}$. Существует так называемый базис Картана алгебры A, относительно которого каждая неразложимая составляющая U_λ ($\lambda = 1, \ldots, n$) левого регулярного представления алгебры A имеет вид

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} H^{(1,1)} & & & \\ H^{(2,1)} & H^{(2,2)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ H^{(t,1)} & H^{(t,2)} & \ldots & H^{(t,t)} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $H^{(i,i)}$ — неприводимые представления алгебры A. Каждая U_λ сопряжена с некоторой неразложимой составляющей $V_{\pi(\lambda)}$ правого регулярного представления. Существует такой автоморфизм Накаяма φ алгебры A, что

$$e_{\pi(\lambda),\alpha\beta} \equiv e^{\varphi}_{\lambda,\alpha\beta} \pmod{N}.$$

В упомянутой выше работе было показано, что если (p_s) и (q_s) являются соответствующими относительно автоморфизма φ базисами алгебры A и если U_λ представлена в виде (1), то имеют место соотношения

$$\sum_s h^{(m,l)}_{\mu\nu}(q_s) h^{(i,j)}_{\alpha\beta}(p_s) = 0, \quad \text{если } i < l;$$

$$\sum_s h^{(m,i)}_{\mu\nu}(q_s)\, h^{(i,j)}_{\alpha\beta}(p_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < j, \text{ или если } j = 1,\ m < i, \\ c_\lambda \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, & \text{если } j = 1,\ m = t, \end{cases}$$

где c_λ — отличный от 0 элемент поля K, не зависящий от α, β, μ, ν и i.

Опираясь на эти соотношения, автор доказывает, что при любом a из A имеет место:

$$\sum_s h^{(m,l)}_{\mu\nu}(q_s a)\, h^{(i,j)}_{\alpha\beta}(p_s) = \sum_s h^{(m,l)}_{\mu\nu}(a q_s)\, h^{(i,j)}_{\alpha\beta}(p_s) = 0, \quad \text{если } i < l;$$

$$\sum_s h^{(m,i)}_{\mu\nu}(q_s a)\, h^{(i,j)}_{\alpha\beta}(p_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 < j \text{ или если } j = 1,\ m < t, \\ c_\lambda h^{(i,i)}_{\alpha\nu}(a)\, \delta_{\beta\mu}, & \text{если } j = 1,\ m = t; \end{cases}$$

$$\sum_s h^{(m,i)}_{\mu\nu}(a q_s)\, h^{(i,j)}_{\alpha\beta}(p_s) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } 1 < j \text{ или если } j = 1,\ m < t, \\ c_{\lambda h}^{(t,t)}{}_{\mu\beta}(a)\,\delta_{\alpha\nu}, \text{ если } j = 1,\ m = t. \end{cases}$$

Кроме того, доказывается, что для любых двух соответствующих относительно автоморфизма Накаяма базисов (a_s) и (b_s) алгебры A $\sum_s b_s a_s = 0$ тогда и только тогда, когда характеристика p поля K является делителем порядка $u_{(\lambda)}$ матрицы U_λ для каждого λ.

В заключение приводятся два дополнительных соотношения, аналогичных указанным выше, для случая, когда алгебра A симметрична.

Е. Г. Шульгейфер

1683. Правоальтернативные кольца. Клейнфелд (Right alternative rings. Kleinfeld Erwin), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 939—944 (англ.)

Положим $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$. Кольцо называется правоальтернативным, если в нем тождественно выполняется соотношение $[a, b, b] = 0$. Доказывается, что для того чтобы правоальтернативное кольцо было альтернативным (т. е. чтобы выполнялось также соотношение $[a, a, b] = 0$), необходима и достаточна справедливость условия: если t, u, v принадлежат подкольцу кольца R, порожденному двумя элементами, и $[t, u, v]^2 = 0$, то $[t, u, v] = 0$. Эта теорема обобщает результат референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, № 2, 177—184). На стр. 943 опечатка или неточность: повидимому, вместо $\delta(p^2, a, a, b) = p^3$ должно быть $[p^2a, a, b] = p^3$. При выводе этого результата, кроме указанного, надо использовать $f(p^2, a, b, a) = 0$.

Л. А. Скорняков

1684. О радикале Брауна-Мак-Коя в топологических кольцах. Исеки (On the Brown-McCoy radical in topological rings. Iseki Kiyoshi), Anais Acad. brasileira cienc., 1953, **25**, № 1, 79—86 (англ.)

Двусторонний идеал I кольца R называется обобщенно регулярным, если существует такой элемент $a \in R$, что для любых r, x_i, y_i из R

$$ar - r + \sum(x_i a y_i - x_i y_i) \in I.$$

Радикал Брауна-Мак-Коя (коротко, G-радикал) совпадает с пересечением всех максимальных обобщенно регулярных идеалов. Это свойство используется для доказательства замкнутости G-радикала в топологических кольцах, все G-регулярные элементы которых образуют открытое множество (элемент a называется G-регулярным, если

$$a \in \{ar - r + \sum(x_i ay - x_i y_i)\}.$$

В. М. Курочкин

1685. Теория структур и ее приложение к различным отделам математики. Цаппа (La teoria dei reticolie le sue applicazioni a vari rami della matematica. Zappa Guido), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 167—185 (итал.)

Статья обзорного характера. В первой части излагаются элементарные сведения из теории структур: § 1. Частично упорядоченные множества; § 2. Структуры; § 3. Классификация структур (приводятся первоначальные сведения о дистрибутивных, модулярных, полумодулярных, полных, с дополнениями и других структурах). Вторая часть работы (§ 4. Приложение структур) посвящена элементарному обзору теоретико-структурных вопросов в математической логике, в топологии и теории множеств, в аффинной, проективной и алгебраической геометрии, в алгебре.

Примечание референта. Обзор весьма не полон; в частности, в библиографии, кроме монографии В. И. Гливенко, не упомянута ни одна работа советских авторов.

Ю. И. Соркин

1686. Интервальная топология структуры. Нортхем (The interval topology of a lattice. Northam E. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 824—827 (англ.)

Множество элементов $\{a_i\}$ структуры называется отделяющим для интервала $[x, y]$, если $x < a_i < y$ для каждого элемента a_i и если каждый элемент интервала $[x, y]$ сравним по крайней мере с одним элементом a_i. Доказывается, что интервальная топология структуры является хаусдорфовой только тогда, когда для каждого замкнутого интервала имеется конечное отделяющее множество. Это предложение применяется к исследованию ранее решенной проблемы 76 Г. Биркгофа (Rennie B., The theory of lattices, Cambridge, 1951) и к решению проблемы 104: структурно упорядоченная группа может не быть топологической в ее интервальной топологии. Находятся также необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка была изолированной в интервальной топологии. Этим дается решение части проблемы 21.

Г. А. Арешкин

1687. Примитивные элементы в модулярной структуре. Уцуми (On primal elements in a modular lattice. Utumi Yuzo), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 29—31 (англ.)

Рассматривается дедекиндова структура L с условием обрыва возрастающих цепей. Через Θ обозначается такое множество конгруенций структуры L, что пересечение конечного числа конгруенций из Θ также принадлежит Θ. Через $a(\theta)$ обозначается наибольший элемент, конгруентный элементу a относительно конгруенции θ; совокупность элементов x, удовлетворяющих условию $x(\theta) = 1$, обозначается через $X(\theta)$. Элемент q называется примарным (относительно Θ), если либо $q \in X(\theta)$, либо $q = q(\theta)$ для каждой конгруенции θ из Θ. Элемент a называется примитивным (относительно Θ), если из $a(\theta_1 \cap \theta_2) = a$ следует $a(\theta_1) = a$ или $a(\theta_2) = a$ для любых θ_1 и θ_2 из Θ. Каждый примарный элемент является примитивным. Каждый неразложимый в пересечение элемент также является примитивным.

Пересечение элементов структуры L называется приведенным, если ни одну из компонент этого пересечения нельзя заменить большей. Если $a = a_1 \cap \ldots \cap a_n$ есть приведенное пересечение, то $a(\theta) = a$ тогда и только тогда, когда $a_i(\theta) = a_i$ для $i = 1, \ldots, n$.

Несократимое представление элемента структуры L в виде пересечения примитивных элементов называется кратчайшим, если пересечение любого под-

множества его компонент не является примитивным элементом. Приведенное пересечение $a = a_1 \cap \ldots \cap a_n$ примитивных элементов тогда и только тогда будет примитивным элементом, когда для некоторого i из $a_i(\theta) = a_i$ следует $a(\theta) = a$ для любого θ из Θ. Каждый элемент структуры L представим в виде приведенного и кратчайшего пересечения конечного числа примитивных элементов. Если $a_1 \cap \ldots \cap a_m = b_1 \cap \ldots \cap b_n$ — два таких представления, то $m = n$ и, при соответствующей нумерации, $a_i(\theta) = a_i$ тогда и только тогда, когда $b_i(\theta) = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Приводятся два примера применения полученных результатов. В качестве первого примера рассматривается структурно упорядоченная целая полугруппа L, в которой выполняются модулярный закон и условие обрыва возрастающих цепей. Подмножество этой полугруппы называется k-системой, если оно 1) непустое, 2) j-замкнуто и 3) мультипликативно замкнуто. Каждой k-системе k соответствует конгруенция $\theta(k)$, определяемая следующим образом: элементы a и b конгруентны относительно $\theta(k)$, если $a^{-1} b \cap b^{-1} a$ принадлежит k. Множество Θ состоит из всех таких конгруенций. С каждым элементом a из L связывается k-система, состоящая из всех таких элементов x, что $ax^{-1} = a$; конгруенция, соответствующая этой k-системе, обозначается через $k(a)$. Доказывается, что в рассматриваемом случае введенное понятие примитивного элемента эквивалентно понятию примитивного элемента в смысле Кертиса. Элемент a структурно упорядоченной целой полугруппы L, удовлетворяющей указанным выше условиям, Кертис называет примитивным, если k-система, которой соответствует конгруенция $k(a)$, дуальна простому, в теоретико-структурном смысле, идеалу (Curtis C. W., Amer. J. Math., 1952, **74**, 687—700).

В качестве второго примера рассматривается дедекиндова структура L конечной длины, Θ — совокупность всех конгруенций этой структуры.

Е. Г. Шульгейфер

1688. К теории структур. Исеки (Contribution to lattice theory. Iseki K.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 194—203 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Фильтром F структуры L с 0 называется множество ее элементов, удовлетворяющих условиям: 1) $0 \notin F$; 2) если $a \in F$ и $x \geqslant a$, то $x \in F$; 3) если $a \in F$, $b \in F$, то $a \cap b \in F$.

Фильтр называется максимальным, или ультрафильтром, если он не содержится ни в каком другом фильтре. Структура L называется U-отделимой, если для каждой пары ее элементов существует ультрафильтр, содержащий один элемент и не содержащий другой. Говорят, что структура L обладает W-свойством, если для любых a, b $(a > b)$ из L существует такой элемент x, что $a \cap x \neq 0$, $b \cap x = 0$. Структура L U-отделима тогда и только тогда, когда L обладает W-свойством.

Фильтр F структуры L называется простым, если из $a \cup b \in F$ следует либо $a \in F$, либо $b \in F$. Фильтр F называется неразложимым в пересечение, если он не может быть представлен в виде пересечения двух фильтров, отличных от F. Для того чтобы структура с 0 была дистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы каждый неразложимый в пересечение фильтр был простым.

Говорят, что элемент b находится между a и c, и записывают abc, если $(a \cap b) \cup (b \cap c) = b = (a \cup b) \cap (b \cup c)$. Сегмент $< a, b >$ есть множество $\{x \mid a \cap b \leqslant x \leqslant a \cup b\}$. Структура L дистрибутивна тогда и только тогда, если для каждой пары $a, b \in L$ из $x \in < a, b >$ следует axb. Структура L дистрибутивна тогда и только тогда, если из 1) $a, b \leqslant c \cup d$; 2) $a \cap b = b \cap c$; 3) $(a \cup c) \cap d = (b \cup c) \cap d$ следует $a = b$. Структура L называется p-отделимой, если для каждой пары ее элементов существует простой фильтр, содержащий один элемент и не содержащий другой. Структура с 0 дистрибутивна в том и только в том случае, если она либо p-отделима, либо каждый ее фильтр разлагается в пересечение всех простых фильтров, его содержащих.

Дистрибутивная структура с 0 и 1 тогда и только тогда является булевой алгеброй, когда каждый неразложимый в пересечение фильтр максимален. Дополнением относительно пересечения элемента a в структуре с 0 называется элемент a', для которого $a \cap a' = 0$ и из $a \cap x = 0$ для некоторого x следует $x \leqslant a'$. Структура, в которой каждый элемент обладает дополнением относительно пересечения, называется структурой с дополнениями относительно пересечения. Для того чтобы структура L с дополнениями относительно пересечения была булевой алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент a из L был нормальным: $a'' = a$, где $a'' = (a')'$. Если полная структура, удовлетворяющая бесконечному дистрибутивному закону $x \cap (\bigcup_\alpha y_\alpha) = \bigcup_\alpha (x \cap y_\alpha)$, обладает W-свойством, то она является булевой алгеброй. Следовательно, для полной структуры, удовлетворяющей наиболее общему дистрибутивному закону, из W-свойства вытекает ее изоморфность с алгеброй множеств.

Элементы a и b называются сравнимыми относительно фильтра F (или относительно идеала I), $a \equiv b(F)$ $(a \equiv b(I))$, если существуют такие элементы x и y из F (из I), что $a \cap x = b \cap y$ $(a \cup x = b \cup y)$. Класс сравнимых относительно фильтра F (идеала I) элементов, содержащий 0 (1) из L, обозначается через $F^0(I^1)$. Для того чтобы дистрибутивная структура с 0 и 1 была булевой алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы $F^{01} = F$ для каждого главного фильтра (или $I^{10} = I$ для каждого главного идеала).

Структура L с 0, удовлетворяющая условиям: 1) L замкнута относительно бинарной операции $\dashv$, 2) $a \dashv b \leqslant c$ и $b \leqslant a \cup c$ для $a, b, c \in L$ эквивалентны, — называется алгеброй Брауэра. Элемент $\neg a = 1 \dashv a$ называется брауэровым дополнением элемента a. Для того чтобы алгебра Брауэра с 0 была булевой алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы $\neg a \cap a = 0$ для каждого a из L.

Структура L называется атомной, если каждый ненулевой элемент из L содержит по крайней мере один атом. Через $r(a)$ обозначается множество всех атомов x, для которых $x \leqslant a$. Элемент a атомной структуры, обладающей W-свойством, равен объединению всех элементов из $r(a)$: $a = \bigcup_{x \in r(a)} x$. Атомная структура L, обладающая W-свойством, изоморфна структуре всех представляющих множеств из L.

А. Х. Лившиц

См. также: 1608, 1610, 1618, 1631, 1636, 1637, 1730, 1854, 1855, 1858, 1893, 1910, 1925, 1927, 1933, 1935

ТОПОЛОГИЯ

1689. О пространстве замкнутых множеств бикомпактного пространства. Альбрехт (Asupra spaţiului mulţimilor închise al unui spaţiu compact. Albrecht Felix), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, 3, № 1—2, 13—17 (рум.; резюме русс., франц.)

С помощью теории равномерных пространств в смысле А. Вейля доказываются следующие теоремы. Пусть R — хаусдорфово пространство, обладающее хотя бы одной равномерной структурой, а $F(R)$ — множество всех его замкнутых множеств, пространство R бикомпактно и связно (локально связно) тогда и только тогда, когда бикомпактно и связно (локально связно) пространство $F(R)$.

Ю. М. Смирнов

1690. Две теоремы о пространстве замкнутых множеств. Альбрехт (Două teoreme asupra spaţiului mulţimilor închise. Albrecht Felix), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, 3, № 5—6, 193—196 (рум.; резюме русс., франц.)

Для равномерного пространства E на семействе $\mathscr{F}(E)$ всех непустых замкнутых подмножеств E у Бурбаки (Bourbaki N., Topologie générale, Paris, 1940, ch. II, 97) определяется равномерная структура. Последняя порождает в $\mathscr{F}(E)$ топологию.

В статье доказывается:

1) Если E — бикомпакт (употребляется термин «компакт»), то эта топология в $\mathscr{F}(E)$ совпадает с топологией А. А. Маркова (Иванова В. М., Успехи матем. наук, 1951, 6, № 4, 200).

2) Пусть E и E' — бикомпакты. Если E и E' квазигомеоморфны (Borsuk K., Fundam. Math., 1938, 31, 154—159), то $\mathscr{F}(E)$ и $\mathscr{F}(E')$ также квазигомеоморфны.

3) Пусть (E_α) — семейство бикомпактов. Пространство $\Pi\mathscr{F}(E_\alpha)$ гомеоморфно ретракту пространства $\mathscr{F}(\Pi E_\alpha)$; здесь Π означает прямое произведение.

И. Н. Врублевская

1691. Индуктивная размерность вполне нормальных пространств. Даукер (Inductive dimension of completely normal spaces. Dowker C. H.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 16, 267—281 (англ.)

Доказывается ряд теорем о так называемой большой индуктивной размерности $\operatorname{Ind} R$ (индукция идет не по точкам, а по замкнутым множествам). Прежде всего для множеств A и B без общих точек, лежащих во вполне нормальном (т. е. наследственно нормальном) пространстве R, из которых одно замкнуто, доказывается, что число $\operatorname{Ind}(A \cup B)$ равно наибольшему из чисел $\operatorname{Ind} A$, $\operatorname{Ind} B$; как показывает пример, построенный О. В. Локуциевским (Докл. АН СССР, 1949, 67, № 2, 217—219), теорема перестает быть верной, если заменить наследственную нормальность обыкновенной. Далее, если в наследственно нормальном пространстве R выбраны убывающие открытые множества Y_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, с пустым пересечением, причем $\operatorname{Ind}(Y_k \setminus Y_{k+1}) \leqslant n$, то и $\operatorname{Ind} Y_1 \leqslant n$.

Дальнейшие результаты связаны с проблемой монотонности размерности. Как известно, если для всякого открытого множества A, лежащего в наследственно нормальном пространстве R, имеем $\operatorname{Ind} A \leqslant \operatorname{Ind} R$, то и для любого $A \subset R$ будет $\operatorname{Ind} A \leqslant \operatorname{Ind} R$.

Автор доказывает, что если в наследственно нормальном пространстве R для любого открытого множества $A \subseteq R$ выполнено неравенство $\operatorname{Ind} A \leqslant \operatorname{Ind} R$, то имеет место теорема суммы: для любых замкнутых множеств A_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Ind} A_k \leqslant n$, будет $\operatorname{Ind} \bigcup_k A_k \leqslant n$.

В работе вводится новый класс пространств: тотально нормальные пространства. Нормальное пространство называется тотально нормальным, если каждое его открытое множество имеет локально конечное покрытие открытыми F_σ-множествами. (Фундаментальная роль таких открытых множеств, в частности в теории размерности нормальных пространств, была выяснена референтом ранее, см. Докл. АН СССР, 1940, 26, № 7, 627—630. *Прим. реф.*). Тотально нормальные пространства охватывают в качестве частного случая наследственно паракомпактные хаусдорфовы пространства. В тотально нормальных пространствах имеет место теорема о монотонности размерности, а следовательно, и теорема суммы.

Автор ставит вопрос о том, справедлива ли теорема о монотонности для всех наследственно нормальных хаусдорфовых пространств.

П. С. Александров

1692. О пополнении метрических пространств· Ли Сяо-чжуань (論度量空間的補全法· 李孝傳), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 2, 154—165 (кит.; резюме англ.)

Производится подробное исследование, в большинстве своем известных, свойств операции пополнения $\Gamma(R)$ метрического пространства R. Например, доказываются следующие теоремы: а) пополнение произведения метрических пространств в конечном или счетном числе в надлежащей метрике изометрично произведению пополнений этих же пространств; б) для того чтобы метрическое пространство R было локально полным, необходимо и достаточно, чтобы R было открыто в своем пополнении $\Gamma(R)$ и т. п.

В отличие от Менгера автор называет метрическое пространство выпуклым, если для любой пары его точек x, y имеется такая («средняя») точка z, что $\rho(x, z) = \rho(y, z) = \rho(x, y)/2$. Для всякого выпуклого в этом смысле метрического пространства его пополнение оказывается связным. Если метрическое пространство R выпукло и если любое его ограниченное множество вполне ограничено, то и пополнение $\Gamma(R)$ будет выпукло как в смысле автора, так и в смысле Менгера, а потому всякие две его точки можно соединить дугой. В случае, когда в выпуклом пространстве R существуют ограниченные, но не вполне ограниченные множества, вопрос остается открытым.

Ю. М. Смирнов

1693. Пример одномерного континуума, нульмерно и открыто отображающегося на квадрат. Келдыш Л., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 2, 201—204

В трехмерном пространстве xyz строится сначала двумерный континуум Z, проектирование которого в плоскость xy есть нульмерное открытое отображение на квадрат C. После этого строится сходящаяся последовательность двумерных континуумов

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ в четырехмерном пространстве $xyzt$ таким образом, что проекция каждого X_n в пространство xyz есть континуум Z, а проектирование континуума X_n на квадрат C есть нульмерное открытое отображение. Одномерный континуум, обладающий указанным в заголовке статьи свойством, определяется как топологический предел X континуумов X_n; его проектирование на квадрат C оказывается нульмерным открытым отображением. *П. С. Александров*

1694. О структуре брауэровских переносов плоскости. Хомма, Терасака (On the structure of the plane translation of Brouwer. Homma Tatsuo, Terasaka Hidetaka), Osaka Math. J., 1953, 5, № 2, 232—266 (англ.)

Изучаются топологические отображения плоскости на себя, не имеющие неподвижных точек. Рассматривая, наряду с отображением f такого рода, всевозможные его положительные и отрицательные степени f^n, автор вводит ряд определений регулярности и иррегулярности точек, множеств и линий. Например, множество M называется (+)-регулярным, если верхний топологический предел последовательности множеств $f^n(M)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является пустым; множество M называется (—)-регулярным, если будет пустым верхний топологический предел последовательности множеств $f^n(M)$ $(n = -1, -2, \ldots)$. Точка называется (±)-регулярной, если она обладает окрестностью, являющеюся (±)-регулярным множеством. Множества и точки, не являющиеся (±)-регулярными, называются иррегулярными.

Рассмотрению этих и дальнейших определений посвящены разделы I и II статьи.

В разделе III автор приводит теоремы, касающиеся структуры множеств, на которые можно разбить плоскость по отношению к данному топологическому отображению f плоскости на себя без неподвижных точек. Например, «первая структурная теорема» гласит: если f — топологическое отображение плоскости на себя, не имеющее неподвижных точек, то плоскость можно подразделить на три семейства множеств, не имеющих попарно общих точек: $O_1, O_2, \ldots; O'_1, O'_2, \ldots;$ и F. Каждое O_n — область полной регулярности — есть неограниченная односвязная область, которая может быть заполнена регулярным семейством регулярных линий тока. Каждое O'_n есть односвязная свободная область и все ее точки являются регулярными. F есть замкнутое множество, состоящее из иррегулярных точек и представимое в виде суммы не более чем счетного множества (+) и (—)-особых линий и их предельных множеств.

В разделе IV приведены примеры.

А. С. Пархоменко

1695. Аффинные структуры в трехмерных многообразиях. VII. Диски, прокалываемые интервалами. Мойс (Affine structures in 3-manifolds. VII. Disks which are pierced by intervals. Moise Edwin E.), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 403—408 (англ.)

Пусть D — диск (топологический образ круга) в триангулированном трехмерном многообразии K. Говорят, что простая дуга e прокалывает диск D в точке p, если $D \cap e$ состоит из одной точки p, внутренней для D и для e, и если для всякой достаточно малой открытой окрестности U точки p разность $U \setminus D$ является суммой двух открытых множеств без общих точек, каждое из которых пересекает ту компоненту кривой $U \cap e$, которая содержит точку p.

Множество M правильно (tamely) вложено в K, если существует гомеоморфизм, переводящий K в себя и M в некоторый полиэдр.

Теорема 1. Пусть D — диск, правильно вложенный в триангулированное многообразие K, и пусть правильно вложенная в K дуга e прокалывает его в некоторой точке p. Тогда $D \cup e$ правильно вложено в K.

В заключение автор исправляет неточности, допущенные им в статьях «Affine structures in 3-manifolds», II и III (Ann. Math., 1952, 55, 172—176, 203—214) и замеченные Бингом (R. H. Bing).

В. А. Ефремович

1696. Аффинные структуры в трехмерных многообразиях. VIII. Инвариантность типа узла; локально правильное вложение. Мойс (Affine structures in 3-manifolds. VIII. Invariance of the knot-types; local tame imbedding. Moise Edwin E.), Ann. Math., 1954, 59, № 1, 159—170 (англ.)

Доказываются следующие теоремы: (6.1). Тип узла для полигона I, лежащего в трехмерном пространстве, является инвариантом при сохраняющих ориентацию гомеоморфизмах, переводящих пространство в себя и I в полигон. (8.1). В триангулированном трехмерном многообразии каждое локально правильное вложение множества M является правильным (см. реф. 1695). (9.1). Каждое трехмерное многообразие с краем триангулируемо. (Теоремы (8.1) и (9.1) впервые доказаны Бингом, см. реф. 1697). (9.2). Пусть M — компактное трехмерное многообразие с краем, лежащее в трехмерном пространстве, причем край есть двумерная сфера. Тогда M есть трехмерный элемент. (9.3). Пусть S^2 — двумерная сфера в трехмерном пространстве E^3, причем S^2 есть сумма двух правильно вложенных дисков, пересекающихся по их общей границе. Тогда сфера S^2 правильно вложена в E^3.

В. А. Ефремович

1697. Локально правильные множества правильны. Бинг (Locally tame sets are tame. Bing R. H.), Ann. Math., 1954, 59, № 1, 145—158 (англ.)

Подмножество M триангулированного многообразия (или многообразия с краем) называется правильным (tamely) или правильно вложенным, если существует гомеоморфизм, переводящий многообразие в себя и подмножество M в полиэдр. Подмножество M называется локально правильным в точке p, если существует ее окрестность U и гомеоморфизм, переводящий замыкание $\bar{U}$ и $\bar{U} \cap M$ в полиэдры. Основным результатом является теорема 9: Всякое локально правильное замкнутое подмножество триангулированного многообразия с краем правильно. Кроме того, автор распространяет ряд результатов Мойса (Moise E. E., Ann. Math., 1952, 56, 96—114, см. также реф. 1695, 1696) о трехмерных многообразиях на многообразия с краем. Так, для этих многообразий доказывается основная гипотеза комбинаторной топологии («Hauptvermutung»); доказывается также, что всякое трехмерное многообразие с краем триангулируемо. *В. А. Ефремович*

См. также: 1666, 1667, 1686, 1701, 1743.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1698. Производные числа Дини непрерывных функций. Морс (Dini derivatives of continuous functions. Morse Anthony P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 126—130 (англ.)

Рассматривается соотношение между функцией $f(x)$ и ее производными числами Дини.

Отметим следующую теорему:

Если множество $E\underset{x}{}[D^+ f(x) \geqslant 0]$ всюду плотно, то функция $f(x)$ либо строго возрастает, либо множество $E\underset{x}{}\left[D^+ f(x) = 0\right]$ имеет мощность континуума.

Как следствие получено следующее предложение:

Если $f(x)$—нигде не дифференцируемая функция, то множество $E\underset{x}{}\left[D^+ f(x) < \infty\right]$ первой категории и имеет мощность континуума.

Первое из этих утверждений было доказано ранее (Young W. H., Messenger Math., 1908—1909, **38**, 65—69). *А. Г. Джваршейшвили*

1699. Обобщенная n-я примитивная. Джеймс (Generalized n-th primitives. James R. D.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 1, 149—176 (англ.)

Вводится понятие P^{2m}-интеграла, обобщающее ранее введенный и изученный автором интеграл Перрона второго порядка, короче P^2-интеграл (James R. D., Walter H. Gage, Trans. Roy. Soc. Canada, 1946, Sec. III, **40**, 25—35; James R. D., Canad. J. Math., 1950, **2**, 297—306). При этом основная роль принадлежит понятию обобщенной симметрической производной $2m$-го порядка $D^{2m} F(x_0)$, определяемой как β_{2m} при наличии представления

$$\frac{1}{2}\left[F(x_0+h)+F(x_0-h)\right]=\sum_{k=0}^{m}\beta_{2k}\frac{h^{2k}}{(2k)!}+o(h^{2m});$$

верхним и нижним производным соответствующего типа $\Delta^{2m} F(x_0)$ и $\delta^{2m} F(x_0)$; рассматриваемым в работе условиям A_{2m} и B_{2m-2} для непрерывных функций; $2m$-выпуклым функциям (имеющим неотрицательные $2m$-ые разделенные разности).

P^{2m}-интеграл $\int_{(a_i)}^{c} f(x) d_{2m} x$ для $f(x)$ на $[a, b]$, где $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m} = b$, $c \in [a, b]$, вводится с помощью мажорант и минорант $Q^*(x) = (-1)^r Q(x)$, $q^*(x) = (-1)^r q(x)$; $a_r \leqslant x < a_{r+1}$, где $Q(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям A_{2m} и B_{2m-2};

$$Q(a_i) = q(a_i) = 0;$$

$$-\infty \neq \delta^{2m} Q(x) \geqslant f(x) \geqslant \Delta^{2m} q(x) \neq +\infty.$$

Изучаются свойства P^{2m}-интеграла. При некоторых условиях конечные обобщенные симметрические производные $2m$-го порядка P^{2m}-интегрируемы.

Далее вводится P^{2m+1}-интеграл, связанный с понятием обобщенной симметрической производной $D^{2m+1} F(x_0)$, определяемой как β_{2m+1} при наличии представления

$$\frac{1}{2}\left[F(x_0+h)-F(x_0-h)\right]=\sum_{k=0}^{m}\beta_{2k+1}\frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(h^{2m+1}).$$

Наконец вводится $\mathscr{P}^n$-интеграл, связанный с понятием обобщенной производной $D^n F(x_0)$, определяемой как α_n при наличии представления

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{h^k}{k!}+o(h^n).$$

$\mathscr{P}^n$-интегралы сравниваются с интегралами Чезаро—Перрона (Burkill J. C., Proc. London Math. Soc., 1935, **39**, 541—552). *И. И. Романовский*

1700. Интеграл от функции по функции. Лейн (The integral of a function with respect to a function. Lane Ralph E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 59—66 (англ.)

Вводится интеграл, являющийся обобщением обычного интеграла Стилтьеса, от функции $u(x)$ по функции $v(x)$ на отрезке $[a, b]$. Указанный интеграл определяется как предел интегральных сумм вида

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[u(x_i)+u(x_{i+1})\right]\left[v(x_{i+1})-v(x_i)\right],$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Показывается, что такой интеграл, сохраняя обычные свойства интеграла Стилтьеса, имеет, кроме того, ряд новых. Например, он существует, когда одна из функций имеет только разрывы первого рода, а другая является функцией с ограниченной вариацией. Далее формула

$$\int_a^b u(x)\,d\left[\int_a^x v(t)\,dw(t)\right]=\int_a^b u(x)\,v(x)\,dw(x)$$

оказывается справедливой при более широких предположениях, чем для обычного интеграла Стилтьеса. *Л. Д. Кудрявцев*

1701. Определение вариаций множества и метрический закон двойственности. Витушкин А. Г., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 5, 893—896

В евклидовом пространстве E^n рассматривается пространство R_k^n упорядоченных систем r_k^n, состоящих из k попарно ортогональных свободных единичных векторов. Индуктивным образом определяется понятие измеримого множества в R_k^n и для него понятие меры μ_k^n. Затем даются определения V_k^n-измеримого множества $E \subseteq E^n$ и его k-кратной вариации $V_k^n(E)$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$ Далее вводится класс V_k-измеримых множеств и для них определяется понятие вариации порядка k множества $E : V_k(E)$.

Утверждается, что:

1. Всякое замкнутое подмножество пространства E^n измеримо как (V_k^n), так и (V_k) $(k = 0, 1, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$.

2. Для всякого множества $E \subseteq E^n$, одновременно измеримого (V_k^n) и (V_k), имеет место $V_k^n(E) = V_k(E)$.

3. Для произвольных положительных чисел $a_k \leqslant \infty$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $a_n < \infty$, a_0 — целое число, существует компакт $F \subseteq E^n$ такой, что $V_k^n(F) = a_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

4. Если $E \subseteq E^n$ есть V_k^n-измеримое множество, лежащее в n-мерном замкнутом кубе Q^n с ребром длины $a \leqslant 1$, и если $V_k^n(E) = 0$, $k = \nu + 1, \ldots, n$, $\nu < n$, то в $Q^n \setminus E$ существует n-мерный замкнутый куб с ребрами, параллельными ребрам куба Q^n и длины которых

$$d \geqslant \frac{1}{2} a^{n/(n-\nu)} \nu^{-\nu/(n-\nu)} \left[1 + \sum_{k=0}^{\nu} V_k^n(E)\right]^{-1/(n-\nu)}.$$

Доказательства указанных предложений не приводятся. *Л. Д. Кудрявцев*

1702. Вариации функции многих переменных и достаточные условия для их ограниченности. Витушкин А. Г., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 6, 1089—1091

Рассматривается действительная функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n действительных переменных, определенная на множестве $E \subseteq E^n$. Через E_t обозначается множество уровня t функции f. Функция f называется V_k-измеримой, если для почти всех t множества E_t V_{k-1}-измеримы (см. реф. 1701), а функция от t $V_{k-1}(E_t)$ измерима по Лебегу. Величина

$$V_k(f, E) = V_k^n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{k-1}(E_t)\, dt$$

называется k-кратной вариацией функции f $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Утверждается, что:

1. Если множество E замкнуто, а f непрерывна, то f V_k-измерима $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Для произвольных положительных $a_k \leqslant \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ существует непрерывная функция f, определенная на n-мерном замкнутом кубе, такая, что $V_k^n(f) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Если функция f определена на замкнутом n-мерном единичном кубе и имеет частные производные всех порядков до $n - k$ включительно, каждая из которых, так же как и сама функция, удовлетворяет условию Липшица с константой L, то k-кратная вариация функции f ограничена постоянной, зависящей только от n и L.

Наряду с этим формулируется ряд свойств непрерывно дифференцируемой функции f, определенной на n-мерном замкнутом кубе $Q^n \subseteq E^n$, связанных с ее множествами уровня.

Компонента D множества уровня $E_t \subseteq Q^n$ называется типичной, если D не пересекается с границей куба Q^n и в каждой точке $x \in D$ $|\operatorname{grad} f(x)| > 0$.

Каждая компонента теоретико-множественной суммы K всех типичных компонент называется кольцоидом.

Утверждается, что граница кольцоида состоит из двух компонент, одна из которых отделяет другую от бесконечности, при этом на каждой из указанных компонент функция f постоянна и равна либо верхней, либо нижней грани значений f на данном кольцоиде, а на внутренней границе кольцоида существует точка x_0 такая, что $|\operatorname{grad} f(x_0)| = 0$. Формулируется еще ряд существенных теорем, которые мы не приводим вследствие сложности их формулировок. Доказательства отсутствуют.

Л. Д. Кудрявцев

1703. Об обобщенно абсолютно непрерывных функциях от двух переменных. Джваршейшвили А. Г., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 3, 129—133

Рассматриваются функции двух переменных на интервале $R_0 = [(a, b)(c, d)]$. Определяются понятия λ-регулярной $(0 < \lambda \leqslant 1)$, регулярной и сильной производных от $F(x, y)$ по множеству E в точке $p(x_0, y_0) \in E$. Отмечается, что если $F(x, y)$ есть класса ACG на R_0, то R_0 (соответственно почти весь R_0) представляется суммой счетного числа таких замкнутых множеств A_k, что почти всюду на A_k существует суммируемая на A_k λ-производная (соответственно сильная производная) относительно A_k. Далее утверждается, что если $F(x, y)$ — произвольная непрерывная функция, то для того чтобы $R_0 = \sum_1^\infty A_k + H$, $|H| = 0$, так, что почти всюду на каждом A_k существует сильная производная по A_k, необходимо и достаточно, чтобы $R_0 = \sum_1^\infty E_k + H_1$, $|H_1| = 0$, так, что на каждом E_k функция F есть класса Lip.

Вводится понятие смешанной аппроксимативной производной и отмечается, что для функции класса ACG она почти всюду совпадает с $D_{ap}F(x, y)$.

В заключение отмечаются некоторые свойства двойных интегралов Данжуа, введенных В. Г. Челидзе (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1947, 15, 155—242).

П. И. Романовский

1704. К вопросу о существовании полного дифференциала для функций класса P. Бисли (Concerning total differentiability of functions of class P. Beesley E. M.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 169—205 (англ.)

Пусть $f(x, y)$ — функция, заданная на единичном квадрате I. Вариация Пирпонта $P(f)$ для функции f определяется следующим образом: квадрат I разбивается на λ^2 равных квадратов; пусть $\omega_\nu^\lambda(f)$ — колебание функции f в ν-ом квадрате; тогда $P(f) = \sup_\lambda \left(\sum_{\nu=1}^{\lambda^2} \lambda^{-1} \omega_\nu^\lambda(f)\right)$. Через P обозначается множество функций с ограниченной вариацией Пирпонта, через C, как обычно, — множество непрерывных функций. Рассматривается пространство $P \cap C$ с нормой $\|f\|_{P \cap C} = \max |f| + P(f)$. Через E обозначается множество функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) вдоль каждого отрезка прямой в I функция $f \in E$ абсолютно непрерывна; 2) $\|f\|_E < \infty$, где $\|f\|_E$ — верхняя грань вариаций функции f вдоль отрезков в I; 3) на границе квадрата I $f(x, y) = 0$. Рассматривается пространство $P \cap E$ с нормой $\|f\|_{P \cap E} = \|f\|_E + P(f)$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Множество функций, не имеющих нигде полного дифференциала, является в пространстве $P \cap C$ множеством второй категории.

2. Множество функций, не имеющих нигде пол-

ного дифференциала, является в пространстве $P \cap E$ множеством второй категории.

3. $P \cap E$ — множество первой категории в E.

Е. В. Гливенко

1705. О теореме вложения для предельного показателя. Ильин В. П., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 5, 905—908

Рассматриваются функции от n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащие в области D классу $W_p^{(l)}(D)$, т. е. имеющие в D обобщенные частные производные до порядка l включительно, суммируемые со степенью $p \geq 1$ по области D.

Доказывается теорема: Пусть $f \in W_p^{(l)}(D)$ и $lp < n$, тогда функция f суммируема со степенью q по плоским сечениям области D размерности $m > n - lp$, где $q = mp/(n - lp)$ (D может быть и неограниченной). Отмечается, что эта теорема при $m = n$ доказана С. Л. Соболевым (Матем. сб., 1938, **4** (**46**), № 3, 471—498), а суммируемость со степенью $q^* < mp/(n - lp)$ была доказана С. Л. Соболевым и В. И. Кондрашовым (Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950, стр. 64—65). *Л. Д. Кудрявцев*

1706. Некоторые условия для равномерной сходимости интегралов. Парзен (Some conditions for uniform convergence of integrals. Parzen Emanuel), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 55—58 (англ.)

Пусть R — некоторое пространство, в котором определена и фиксирована σ-конечная мера m, а T — какое-либо множество индексов. Рассматриваются действительные функции $f(x, t)$, $x \in R$, $t \in T$. Определяются различные понятия равномерной сходимости последовательности указанных функций в смысле данной меры, понятие равномерной суммируемости функции и равномерной суммируемости последовательности функций; при этом равномерность понимается всегда в смысле индексов $t \in T$. Устанавливается связь введенных понятий с равномерной сходимостью интеграла

$$\int_R |f_k(x, t) - f(x, t)|\, dm.$$

Л. Д. Кудрявцев

1707. Формула замены переменного в кратном интеграле. Шварц (The formula for change in variables in a multiple integral. Schwartz J.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 81—85 (англ.)

Излагается новое довольно простое доказательство классической формулы замены переменного в кратном интеграле для случая взаимно однозначного непрерывно дифференцируемого отображения одного открытого множества евклидова пространства на другое. *Л. Д. Кудрявцев*

1708. О процессе дифференцирования при отображениях и формуле замены переменного в интеграле по области. Вейссингер (Über einen Differentiationsprozess für Abbildungen und die Transformationsformel für Gebietsintegrale. Weissinger Johannes), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 461—465 (нем.)

Излагается метод доказательства формулы замены переменного в кратном интеграле посредством введения производной по мере. Новых результатов статья не содержит и имеет в основном методическое значение. *Л. Д. Кудрявцев*

1709. Теорема Гаусса-Грина для некоторого класса поверхностей. Чеккони (Sul teorema di-Gauss-Green per una particolare classe di superficie. Cecconi Jaurès), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, 81—112 (итал.)

Статья посвящена обобщению теоремы Гаусса-Остроградского в виде

$$\iiint_D f_x(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \pm \iint_S f(x, y, z)\, dy\, dz,$$

где D — область, ограниченная поверхностью S. Рассматриваются поверхности S типа сферы, принадлежащие весьма широкому классу, содержащему, в частности, ориентированные жордановы поверхности с конечной лебеговой мерой; при этом множество D в приведенной формуле заменяется некоторым подмножеством $D_1 \subseteq D \cup S$. Общие ограничения, накладываемые на изучаемые поверхности, формулируются в терминах ограниченности вариации функций, задающих представление поверхности. Результаты автора являются обобщениями его предыдущих результатов (Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1951, **20**, 194—218), а также соответствующих результатов Радо и Окамура. В применяемом при доказательствах аппарате существенную роль играет топологический индекс точки относительно поверхности и связь его с вариацией отображения (РЖМат, 1954, 3651).

Л. Д. Кудрявцев

1710. О гладкости интегральных средних. Грин (Note on the smoothness of integral means. Green John W.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 53—55. (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть $f(x)$ суммируема, $M_h(x) = (1/h)\int_x^{x+h} f(t)\, dt$. Если $M_h(x)$ имеет непрерывную производную по x, то $f(x)$ совпадает почти всюду с непрерывной функцией.

Эта теорема обобщается на n-ые производные.

Ф. В. Широков

1711. Эквивалентность разложения функций и инвариантное интегрирование. Неф (Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Neff Walter), Comment. math. helv., 1954, **28**, № 2, 162—172 (нем.)

Рассматриваются интегральные поля инвариантно интегрируемых действительных функций, определенных на однородном пространстве R, в котором задана некоторая группа преобразований Г. Изучается эквивалентность разложения функций относительно некоторой системы функций. Даются, например, необходимые и достаточные условия для того, чтобы интеграл, определенный на интегральном поле функций $\mathfrak{T}$, можно было продолжить в интеграл, определенный на интегральном поле $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{T}$. Указывается, в частности, критерий, позволяющий определять, может или нет некоторая данная функция $e(x)$ быть единицей интегральной системы. Исследования автора являются уточнением и обобщением соответствующих результатов Кирша (Kirsch A., Math. Ann., 1952, **124**, 343—363).

Л. Д. Кудрявцев

1712. Об одной системе ортогональных ступенчатых функций. Окума (On a certain system of orthogonal step functions. Ohkuma Tadashi), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 166—177 (англ.)

Указываются ортонормированные системы из ступенчатых функций, частными случаями которых являются системы Хара и Уолша. Для введенных систем даются оценки коэффициентов Фурье, функций Лебега, указываются достаточные условия, при которых ряд Фурье от непрерывной функции сходится равномерно к ней, а также условия, когда такой ряд суммируется $(C, 1)$ почти всюду. Для некоторых ортонормированных систем из ступенчатых функций можно для любой точки x_0 указать такую непрерывную функцию, что ее ряд Фурье в точке x_0 не суммируется $(C, 1)$. *Н. К. Бари*

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1713. О сплетенных суммах порядковых чисел. Неймер (Über Mischsummen von Ordnungszahlen. Neumer Walter), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 244—248 (нем.)

Множество M, упорядоченное по типу μ, называется сплетенной суммой системы $\{A_i\}$ попарно непересекающихся множеств, упорядоченных по типам $\{\alpha_i\}$, если выполнены условия: 1) $M = \bigcup_i A_i$, 2) отношение порядка в каждом из A_i сохраняется в M. В частности, когда $\{A_i\}$ — конечная система вполне упорядоченных множеств, μ будет порядковым числом, зависящим не только от порядковых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, но и от конкретного способа сплетения множеств $\{A_i\}$. Доказывается, что в таком случае среди всевозможных значений, принимаемых μ, имеются наибольшее и наименьшее. Именно:

$$\mu_{\max} = \alpha_1 \dot{+} \alpha_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n,$$

где $\dot{+}$ — знак натуральной суммы в смысле Хессенберга (Хаусдорф Ф., Теория множеств, М. — Л., 1937, 73—74),

$$\mu_{\min} = \alpha_1 \hat{+} \alpha_2 \hat{+} \ldots \hat{+} \alpha_n,$$

где ассоциативная и коммутативная операция $\hat{+}$ определяется так:

пусть $\alpha = \omega\alpha' + a$, $\beta = \omega\beta' + b$;

$$\alpha \hat{+} \beta = \beta \hat{+} \alpha = \begin{cases} \text{тогда } \max(\alpha, \beta) \text{ при } \alpha' \neq \beta', \\ \omega\alpha' + a + b = \alpha + b = \beta + a \text{ при } \alpha' = \beta'. \end{cases}$$

Из этого основного результата вытекает следующее обобщение одного результата Франссе (Fraïssé, C. r. Acad. sci., 1948, 226, 1330—1331): пусть $\alpha_i < \omega^{\omega}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тогда $\mu < \omega^{\omega}$.

На примере показывается, что μ не принимает, вообще, всех значений между $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$.

Б. А. Трахтенброт

1714. Теоремы о существовании непосредственно следующего кардинального числа и аксиома выбора. Тарский (Theorems on the existence of successors of cardinals, and the axiom of choice. Tarski Alfred), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 1, 26—32; Indagationes math., 1954, 16, № 1, 26—32 (англ.)

Рассматриваются следующие три предложения. S_1. Для всякого кардинального числа m существует такое кардинальное число n, что 1) $m < n$ и 2) не существует кардинального числа p, для которого $m < p < n$.

S_2. Для всякого кардинального числа m существует такое кардинальное число n, что 1) $m < n$ и 2) для всякого кардинального числа p неравенство $m < p$ влечет неравенство $n \leqslant p$.

S_3. Для всякого кардинального числа m существует такое кардинальное число n, что 1) $m < n$ и 2) для всякого кардинального числа p неравенство $p < n$ влечет неравенство $p \leqslant m$.

Эквивалентность этих утверждений легко доказать с помощью аксиомы выбора. Основной результат работы состоит в том, что S_1 может быть доказано без помощи аксиомы выбора (теорема 1, полученная автором еще в 1927 г.), а S_2 эквивалентно аксиоме выбора (теорема 2). Взаимоотношение S_3 с аксиомой выбора остается открытым.

Теоремы 1 и 2 доказываются на базе развиваемой автором (содержательно) теории множеств без аксиомы выбора. Кардинальное число m называется конечным, если $m < \aleph_0$, и бесконечным, если $\aleph_0 \leqslant m$; множество называется конечным или бесконечным соответственно своей мощности. Кардинальное число a называется алефом, если оно есть мощность бесконечного множества порядковых чисел. Мощность множества порядковых чисел, меньших порядкового числа α, обозначается $\bar{\alpha}$. Мощность множества порядковых чисел, для которых $\bar{\alpha} \leqslant m$, где m — кардинальное число, обозначается $\aleph(m)$. Последовательно доказываются следующие леммы: 1. Если a — алеф, m — кардинальное число и $a \leqslant m$, то $a + m = m$; 2. Если a — алеф, m и n — кардинальные числа и $a \leqslant m + n$ или $a \leqslant m \cdot n$, то $a \leqslant m$ или $a \leqslant n$; 3. Если кардинальное число m конечно, то $\aleph(m)$ тоже конечно и $\aleph(m) = m + 1$; если m не конечно, то $\aleph(m)$ есть алеф; 4. Неравенство $\aleph(m) \leqslant m$ не выполняется ни для какого кардинального числа m; для всяких кардинальных чисел m и p неравенство $p < \aleph(m)$ влечет неравенство $p \leqslant m$; 5. Для каждого кардинального числа m справедливо неравенство $m < m + \aleph(m)$; если m — бесконечное кардинальное число, то не существует кардинального числа p, для которого $m < p < m + \aleph(m)$; 6. Если кардинальное число m не конечно, то $\aleph(m^2) = \aleph(m)$ (отмечается, что вообще, если m и n суть отличные от нуля кардинальные числа, из которых хотя бы одно не конечно, то $\aleph(m + n) = \aleph(m \cdot n) = \aleph(m) + \aleph(n) = \aleph(m) \cdot \aleph(n)$).

Теорема 1 немедленно следует из леммы 5 (нужно положить $n = m + 1$, если $m < m + 1$, и $n = m + \aleph(m)$, если $m = m + 1$). Доказательство теоремы 2 опирается на предшествующие результаты автора, а именно на эквивалентность аксиомы выбора равенству $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$ при любом α (Fundam. math., 1924, 5, 147—154). *В. А. Успенский*

1715. Минимальная сумма ряда порядковых чисел. Радо (The minimal sum of a series of ordinal numbers. Rado R.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 2, № 114, 218—232 (англ.)

Известно, что сложение порядковых чисел некоммутативно. Автор дает явное выражение минимума

сумм рядов, составленных из элементов данного множества порядковых чисел.

Система порядковых чисел $\alpha_\lambda\ (\lambda < l)$ называется перестановкой полусегмента $[x, y)$ порядковых чисел, если $\lambda \to \alpha_\lambda$ есть взаимно однозначное отображение полусегмента $[0, l)$ на $[x, y)$. По определению, минимальная сумма порядковых чисел $x_\nu\ (\nu < n)$ есть $\min \Sigma_{\lambda<l} x_{\alpha_\lambda}$, где min относится к всевозможным выборам числа l и перестановки $\alpha_\lambda\ (\lambda < l)$ полусегмента $[0, n)$. Оно обозначается через

$$\sum_{\nu<n}^{*} x_\nu.$$

Пусть ω_p означает начальное порядковое число мощности $\aleph_p$ и $0 < k < \omega_{p+1}$, $n \leqslant p$.

Результаты автора:

1.

$$s(x) = \sum_{\nu<x}^{*} \nu = \begin{cases} \frac{1}{2} x(x-1), & \text{если } x \in [0, \omega_0); \\ \omega_p^k [(x-\omega_p^k)+1] = x(x-\omega_p^k) + \omega_p^k, & \\ \text{если} \quad x \in [\omega_p^k,\ \omega_p^k + \omega_0); & \\ \omega_p^k \omega_n, & \text{если } x \in [\omega_p^k + \omega_n, \\ \omega_p^k + \omega_{n+1})\ (n < p) & \\ \text{или } x \in [\omega_p^k + \omega_n,\ \omega_p^{k+1}). & \end{cases}$$

2. Функция $s(x)$ не убывает и непрерывна всюду, за исключением значений $x = \xi_{pkm} = \omega_p^k + \omega_{m+1}$ $(0 < k < \omega_{p+1},\ m < p)$, если ввести естественную топологию в множество порядковых чисел.

3.

$$s(x, y) = \sum_{x\leqslant\nu<y}^{*} \nu = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y-1)(y-x), & \text{если } x \leqslant y < \omega_0; \\ x(y-x), & \text{если } y - x < \omega_0 \leqslant x; \\ x\omega_p, & \text{если } |y-x| = \aleph_p,\ y \leqslant x\omega_p; \\ s(y), & \text{если } x \text{ и } y \text{ не принадлежат одному и тому же из полусегментов, фигурирующих в теореме 1.} \end{cases}$$

В заключение рассматривается максимальная сумма порядковых чисел. Для порядковых чисел $x_\nu\ (\nu < n)$ она определяется как наименьшее число σ такое, что $\sum_{\lambda<l} x_{\alpha_\lambda} < \sigma$, какова бы ни была перестановка $\alpha_\lambda\ (\lambda < l)$ полусегмента $[0, n)$.

Опечатки: 1) в формулировке теоремы 1 напечатано $\omega_p^k [(x - \omega_p^k) + 1] = x(x - \omega_p^k)$ вместо $\omega_p^k [(x - \omega_p^k) + 1] = x(x - \omega_p^k) + \omega_p^k$; 2) на стр. 230, 3 строка сверху, напечатано $\Sigma [\lambda_{\tau-1} < \lambda < l]\, \alpha_\lambda$ вместо $\Sigma [\lambda_{\tau-1} < \lambda < l]\, \alpha_\lambda$; 3) на стр. 231, 4 строка сверху, напечатано $\Sigma [\lambda < \omega_p]\, x$ вместо $\Sigma [\lambda < \omega_p]\, \alpha_\lambda$.

Б. С. Содномов

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

1716. Решение проблемы аппроксимации С. Н. Бернштейна. **Поллард** (Solution of Bernstein's approximation problem. Pollard Harry), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 869—875 (англ.)

Пусть $K(u)$ $(-\infty < u < \infty)$ — непрерывная функция, для которой $\lim_{u\to\pm\infty} u^n K(u) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, и пусть C_0 — пространство всех непрерывных функций $f(u)$ $(-\infty < u < \infty)$, для которых $\lim_{u\to\pm\infty} f(u) = 0$ (с нормой $\|f\| = \max_{-\infty<u<\infty} |f(u)|$). Автор ищет необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество функций $P(u)K(u)$, где $P(u)$ пробегает совокупность всех многочленов, было плотно в C_0. Это есть частный случай проблемы, поставленной С. Н. Бернштейном в 1923 г. и тогда решенной при весьма специальных предположениях об аналитической природе функции $K(u)$. Доказывается теорема:

Для того чтобы множество функций $P(u)K(u)$ было плотно в C_0, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: а) $K(u) \neq 0$ $(-\infty < u < \infty)$, б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K(u)|}{1+u^2}\, du = -\infty$, в) существует последовательность многочленов $p_n(u)$, для которой $\lim_{n\to\infty} p_n(u) K(u) = 1$, $|p_n(u) K(u)| \leqslant C$ $(-\infty < u < \infty)$, где C не зависит от u и n.

При доказательстве достаточности условий автор использует неэлементарные факты из теории функций и некоторые свойства преобразования Гильберта — Стилтьеса. Необходимо заметить, что достаточность условий получается как простое следствие из теоремы С. Н. Бернштейна и референта (РЖМат, 1955, 1153), дающей решение проблемы С. Н. Бернштейна в общем случае. *Н. И. Ахиезер*

См. также: 1604, 1607, 1810, 1848, 1863

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1717. Изучение конформного отображения в школе. **Боль** (Konforme Abbildung im Schulunterricht. Bohl Johann Georg, von), Math.-phys. Semesterber., 1953, 3, № 3/4, 218—234 (нем.)

Статья методического характера. Описывается изучение понятия конформного отображения по следующему плану, который был применен автором при проведении занятий в 13-м классе школы города Бремена: понятие конформного отображения поверхности на поверхность и дифференциально-геометрические условия конформности; примеры — стереографическая проекция сферы и проекция Меркатора, связь между ними; простейшие применения в теории электричества; связь с функциями комплексного переменного. *П. П. Куфарев*

1718. Заметка о рядах Дирихле. **Асцейтия** (Nota sobre series de Dirichlet. Azpeitia

A. G.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 5—6, 312—319 (исп.)

Изучается область аналитичности функции $f(s)$, определенной рядом

$$f(s) = \sum_0^\infty g(n) \exp(-n^\alpha s),$$

где $s = \sigma + it$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $g(s)$ — функция, регулярная в угле $-\pi'(2\alpha) < \psi_2 < \arg s < \psi_1 < \pi'(2\alpha)$ ($\psi_2 < 0 < \psi_1$), причем в этом угле при достаточно больших $|s|$ $|g(s)| < \exp(\delta |s|^\alpha)$. Исследование проводится методом, ранее применявшимся с аналогичной целью к рядам Тейлора и некоторым типам рядов Дирихле (Dienes P., The Taylor series, Oxford, 1931; Cowling V. F., Duke Math. J., 1947, **14**, № 4, 907—911; Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 1065—1082). Именно, используется представление

$$f(s) = \int_\gamma \frac{g(\omega) \exp(-\omega^\alpha s)}{\exp(2\pi i \omega) - 1} d\omega,$$

где γ — граница вышеуказанного угла.

Доказывается, что если $\alpha < 1$, то функция $f(s)$ регулярна в объединении полуплоскостей $\sigma > \delta$, $\delta - \sigma \cos(\alpha\psi_1) + t \sin(\alpha\psi_1) < 0$, $\delta - \sigma \cos(\alpha\psi_2) + t \sin(\alpha\psi_2) < 0$.

Затем рассматривается случай $\alpha = 1$ и устанавливается аналогичный результат. *А. Ф. Леонтьев*

1719. Заметка о рядах Дирихле. X. Замечание к теореме Мандельбройта. Танака (Note on Dirichlet series. X. Remark on S. Mandelbrojt's theorem. Tanaka Chuji), Proc. Japan Acad., 1953, **29**, № 8, 423—426 (англ.)

Мандельбройт (Mandelbrojt S., Séries lacunaires, Paris, 1936, 19) показал, что если ряд Дирихле $F(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ $(s = \sigma + it$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to +\infty)$ сходится во всей плоскости и $\varliminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$, $\varlimsup_{n\to\infty} n/\lambda_n = \delta (\leqslant 1/h)$, то тогда целая функция $F(s)$ в каждой полосе $|\operatorname{Im}(s) - t_0| < \pi(\delta + \varepsilon)$ (t_0 — любое, но фиксированное число) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. При этом под порядком $\rho(D)$ и (в случае конечного ρ) под типом $k(D)$ функции $F(s)$ в области D понимаются величины

$$\rho(D) = \varlimsup_{\sigma\to-\infty} [(-\sigma)^{-1} \ln^+ \ln^+ M(\sigma, D)],$$

$$k(D) = \varlimsup_{\sigma\to-\infty} [e^{\sigma\rho} \ln^+ M(\sigma, D)],$$

где $M(\sigma, D) = \sup |F(s)|$ при $s \in D$, $\operatorname{Re}(s) = \sigma$.

Автор обобщил этот результат, доказав, что при указанных условиях функция $F(s)$ в каждой криволинейной полосе $D(\pi(\delta + \varepsilon); C)$ имеет тот же порядок, что и во всей плоскости, а при $\delta = 0$ она в этой полосе имеет и тот же тип, что и во всей плоскости, причем здесь $D(r; C)$ означает полосу, описываемую кругом радиуса r при движении центра вдоль аналитической кривой C, простирающейся к $\operatorname{Re}(s) = -\infty$. *А. Ф. Леонтьев*

1720. Заметка об одном классе цепных дробей. Франк, Перрон (Remark on a certain class of continued fractions. Frank Evelyn, Perron Oskar), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 270—283 (англ.)

Речь идет о цепных дробях вида

$$k_0\gamma_0 + \cfrac{k_0(1-\gamma_0\bar{\gamma}_0)z}{\bar{\gamma}_0 z - 1 - k_1\gamma_1 + \cfrac{k_1(1-\gamma_1\bar{\gamma}_1)z}{\bar{\gamma}_1 z - 1 - k_2\gamma_2 + \ldots}},$$

где k_p и γ_p — произвольные комплексные постоянные ($k_p \neq 0$, $\gamma_p \neq 0$, $|\gamma_p| \neq 1$, $p = 0, 1, \ldots$). Каждой такой дроби соответствует единственный степенной ряд, обладающий тем свойством, что ряды Тейлора для подходящих дробей порядка $2p$ (соответственно $2p+1$) данной цепной дроби совпадают с этим рядом до членов с z^p (соответственно z^{p-1}) включительно. В заметке ставится вопрос о тех функциях, к которым могут сходиться эти подходящие дроби, когда соответствующим степенным рядом служит геометрическая прогрессия $1 + z + z^2 + \cdots$. Установив общую форму подходящих дробей для этого случая, авторы построением соответствующих примеров показывают возможность следующих предельных соотношений: 1) данная цепная дробь во всей комплексной плоскости (кроме точки $z = 0$) сходится к функции $1/(1-z)$ (нормальный случай); 2) она сходится всюду к совершенно иной функции; 3) она сходится к различным функциям в различных частях плоскости. В частности, при $k_p = 2$ мы имеем $\gamma_p = (-1)^p/(p+2)$ и подходящие дроби сходятся к $1/(1-z)$ при $0 < |z| < 1/2$ и к $4 - 1/z$ при $|z| > 1/2$. *А. Я. Хинчин*

1721. Об алгебраических базисных множествах полиномов. I. Макар (On algebraic basic sets of polynomials. I. Makar Ragy H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 1, 57—68; Indagationes math., 1954, **16**, № 1, 57—68 (англ.)

Относительно терминологии см. ссылку в РЖМат, 1954, 2091, а также РЖМат, 1954, 1628.

Пусть $\{p_n(z)\}$ — базисное множество полиномов и $z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$.

Положим:

$$A_i(R) = \max_{|z|=R} |p_i(z)|, \quad A(R) = \varlimsup_{n\to\infty} \{A_n(R)\}^{1/n}.$$

1. Если $\{p_n(z)\}$ — алгебраическое базисное множество полиномов, причем в кольце $a \leqslant R < b$ выполняется неравенство $A(R) \leqslant R$, то $\{p_n(z)\}$ эффективно в каждом круге $|z| \leqslant R$, где $a \leqslant R < b$. Если $A(R) \leqslant R$ в кольце $a \leqslant R \leqslant b$ и функция $A(R)$ непрерывна при $R = b$, то $\{p_n(z)\}$ эффективно и в круге $|z| \leqslant b$.

2. Алгебраическое базисное множество, удовлетворяющее условию $A(r) < R$ для всех $r < R$, эффективно в круге $|z| < R$.

3. Алгебраическое базисное множество, удовлетворяющее условию $\lim_{R\to 0} A(R) = 0$, эффективно в начале координат.

4. Пусть для алгебраического базисного множества выполняются условия: $\lim_{R\to 0} A(R) < \infty$ и $\lim u(n)/n = \alpha < \infty$ ($u(n)$ — степень $p_n(z)$). Тогда $\{p_n(z)\}$ эффективно не только в начале, но для каждой целой функции и во всей плоскости.

Во всех результатах алгебраичность базисного множества существенна. *С. Я. Хавинсон*

1722. Об алгебраических базисных множествах полиномов. II. Макар (On algebraic basic sets of polynomials. II. Makar Ragy H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 1, 69—76; Indagationes math., 1954, **16**, № 1, 69—76 (англ.)

Автор продолжает изучение эффективности алгебраических базисных множеств полиномов, начатое в первой части работы (см. реф. 1721). Приведем некоторые из результатов.

Пусть $\{p_n(z)\}$ — алгебраическое, простое, единичное (РЖМат, 1954, 1628) множество полиномов. Тогда, если одно из множеств вида

$$a_0\{p_n(z)\}^s + a_1\{p_n(z)\}^{s-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{s-1}\{p_n(z)\} + a_s\{z^n\}$$

(где $a_0 + a_1 + \ldots + a_s \neq 0$, $s \geqslant 1$ — целое) эффективно в круге $|z| \leqslant R$, то эффективными в этом круге будут все множества такого же вида, если только первоначальное множество (т. е. то, для которого первоначально предполагается эффективность) той же степени, что и $\{p_n(z)\}$. Теорема верна и в случае эффективности в начале и эффективности для каждой целой функции.

Пусть $\{p_n(z)\}$ — алгебраическое базисное множество, удовлетворяющее условию $\lim u(n)/n = \alpha < \infty$ ($u(n)$—степень $p_n(z)$), причем $p_n(z) = k_n(z-a_1)\ldots(z-a_{u(n)})$, нули $a_1, a_2, \ldots$ не зависят от n и все лежат в фиксированном круге, а числа k_n таковы, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} |k_n|^{1/n} < \infty$. Тогда $\{p_n(z)\}$ эффективно для каждой целой функции. *С. Я. Хавинсон*

1723. О рядах по рациональным дробям. Келдыш М. В., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 3, 377—380

Пусть $T(r)$ и $N(r, a)$ — характеристики Неванлинна для мероморфной функции конечного порядка $f(z) = \sum_1^\infty A_n/(z-h_n)$. Если $\sum_1^\infty |A_n| < \infty$, то при любом $a \neq 0$ $\overline{\lim_{r\to\infty}} [N(r, a)/T(r)] = 1$ и порядок $N(r,a)$ равен порядку $T(r)$. При выполнении условия $\sum_1^\infty A_n \neq 0$ сформулированные свойства имеют место и при $a = 0$. Условие $\sum_1^\infty A_n \neq 0$ существенно. *М. А. Евграфов*

1724. Об интерполяционных рядах для целых функций. Макинтайр (An interpolation series for integral functions. Macintyre Sheila Scott), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, **9**, сер. 2, 1—6 (англ.)

Положим

$$P_0(z) = 1, \quad P(z) = \int_1^z \cdots \int_{\omega^{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1 \ldots dz_n \quad (n > 0)$$

(многочлены Гончарова для узлов $1, \omega, \omega^2, \ldots$).

I. Пусть $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$. Ряд $\sum_0^\infty F^{(n)}(\omega^n) P_n(z)$ равномерно сходится в любой ограниченной части плоскости к целой функции $F(z)$, если ее максимум модуля $M(r)$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r} < \rho_1, \qquad (1)$$

где ρ_1 — модуль ближайшего к началу нуля целой функции $\Phi_\omega(z)$,

$$\Phi_\omega(z) = \sum_0^\infty \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{z^n}{n!}.$$

II. В обозначениях теоремы I можно заменить условие (1) более слабым условием

$$F(z) = O\{e^{\rho_1|z|}\varphi(\rho_1|z|)\},$$

$$\varphi(x) > 0, \quad \sum_1^\infty \varphi(k)\sqrt{k} < \infty.$$

Следует отметить, что эти теоремы могут быть без труда получены из одного результата А. О. Гельфонда (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 5—6, 236—239), хотя формально и не следуют оттуда. Теорема I была получена А. О. Гельфондом и была опубликована впервые лишь в 1953 г. в связи с некоторыми ее обобщениями (РЖМат, 1954, 3673). *М. А. Евграфов*

1725. О построении и единственности целой функции $F(z)$ по данным значениям $F^{(n)}(n^2)$. Евграфов М. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 3, 201—206

Если целая функция

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n/(2n)!$$

такова, что все особенности функции

$$f(\zeta) = \sum_0^\infty a_n/\zeta^{n+1},$$

сопряженной с $F(z)$ по Борелю, заключены в области $|\varphi(z)| < 1$, где положено

$$\varphi(z) = (\sqrt{1+z} - 1)\, e^{\sqrt{1+z}},$$

то $F(z)$ может быть представлена сходящимся интерполяционным рядом Абеля—Гончарова с узлами $\{n^2\}$. Если все особенности $f(\zeta)$ лежат в области однолистности $\varphi(z)$, не содержащей отрезка $(-\infty, -1)$, то из условий

$$F^{(n)}(n^2) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

следует $F(z) \equiv 0$.

Под «областями» в обоих случаях подразумеваются связные компоненты соответствующих множеств содержащие начало.

Автор замечает (без доказательства), что область указанная в первом утверждении, не может быть расширена, и что аналогичные результаты могут быть получены для случая узлов $\{n^k\}$, где k — любое целое положительное число. *В. Л. Гончаров*

1726. Заметка о конформном отображении. Флетт (A note on conformal mapping. Flett T. M.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 118—121 (англ.)

Дано видоизменение доказательства теоремы Каратеодори о взаимно однозначном и непрерывном соответствии границ при конформном отображении жордановых областей, в котором вместо обычно используемого свойства достижимости граничных точек жордановой области используется свойство

равномерной локальной связности (каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всяких двух точек области, расстояние между которыми меньше δ, существует содержащее их связное подмножество области диаметра меньше ε).

П. П. Куфарев

1727. Об аргументах коэффициентов в разложении однолистной функции. Цинь Юаньсюнь (關於單位圓中單葉函數之係數的幅角. 秦元勳), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, **4**, № 1, 81—86 (кит.; резюме русс.)

Элементарным методом доказана теорема:

Если

$$f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n \qquad (1)$$

есть функция, регулярная в круге $|z| < 1$, и

$$|a_N| > 1/N \qquad (2)$$

для некоторого целого положительного числа $N \geqslant 2$, то можно найти действительные числа φ_1 и φ_2 такие, что функции

$$g_1(z) = z + e^{i\varphi_1} \sum_2^\infty a_n z^n,$$

$$g_2(z) = z + \sum_2^{N-1} a_n z^n + e^{i\varphi_2} a_N z^N + \sum_{N+1}^\infty a_n z^n$$

не однолистны в круге $|z| < 1$.

Автор отмечает, что для доказательства справедливости гипотезы Бибербаха о том, что для любой функции (1), регулярной и однолистной в круге $|z| < 1$, справедливы оценки $|a_n| \leqslant n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, достаточно доказать, что утверждение сформулированной выше теоремы справедливо при любых действительных φ_1 и φ_2, если только неравенство (2) заменено неравенством $|a_N| > N$.

Н. А. Лебедев

1728. О постановке и решении обратных задач напорной фильтрации. Нужин М. Т., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 4, 709—711

Рассматривается фильтрация под флютбетом в грунте бесконечной глубины, причем подземный контур флютбета не задается, а задается на нем распределение скоростей как функция длины дуги. Форма подземного контура флютбета находится в явном виде как решение граничной задачи теории функций для полуплоскости. Вопрос об однолистности найденного таким образом решения и вопрос о том, как надо задать распределение скоростей, чтобы получить физически возможный поток, остаются открытыми. В том случае, когда заданная скорость на подземном контуре флютбета постоянна, эти вопросы были исследованы другим методом ранее (Кочина И. Н., Полубаринова-Кочина П. Я., Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, № 1, 57—66).

Г. Н. Положий

1729. Замечания к статье «Суммирование рядов, содержащих корни трансцендентных уравнений, и соответствующие приложения». Кьюрти (Comment on «The summation of series involving roots of transcendental equations and related applications». Kuerti G.), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 1, 133—134 (англ.)

Доказаны следующие почти очевидные предложения:

1) Пусть $f(z)$ — целая функция, имеющая порядок роста $\rho < 1$, $f(0) = 1$. Тогда между коэффициентами α_n ее степенного ряда $1 + \sum_1^\infty \alpha_n z^n$ и ее нулями z_k существуют соотношения:

$$\alpha_n = \sum c_{\nu_1} c_{\nu_2} \cdots c_{\nu_n}, \text{ где } c_s = -z_s^{-1}. \qquad (1)$$

2) Пусть $f(z)$ — целая функция со степенным рядом $1 + \sum_1^\infty \alpha_n z^{kn}$ и порядок роста функции $\rho < k$. Тогда вместо соотношений (1) имеют место соотношения

$$\alpha_n = \sum b_{\nu_1} b_{\nu_2} \cdots b_{\nu_n}, \qquad (2)$$

где $b_s = -u_s^{-1}$, а u_s — нули функции $\varphi(u) = 1 + \sum_1^\infty \alpha_n u^n$.

В статье, указанной в заглавии (РЖМат, 1954, 5636), утверждалось наличие соотношений (1) и (2) без надлежащих ограничений, наложенных на функцию $f(z)$. Дается пример, показывающий необходимость наложения тех или иных ограничений.

М. А. Лукомская

1730. О нулях многочленов, содержащих произвольные параметры. Янковский (Sur les zéros des polynomes contenant des paramètres arbitraires. Jankowski W.), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1951, A5, 31—92 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Бернацкий (M. Biernacki) поставил задачу: Даны многочлены $P_1(z)$, $P_2(z), \ldots, P_k(z)$ степеней p_1, $p_2, \ldots, p_k$ $(p_1 < p_2 < \ldots < p_k)$, нули которых содержатся соответственно в кругах $|z| \leqslant R_1$, $|z| \leqslant R_2, \ldots, |z| \leqslant R_k$ комплексной плоскости. Требуется найти круг $|z| \leqslant R$, в котором содержится по крайней мере p_1 нулей многочлена $a_1 P_1(z) + a_2 P_2(z) + \cdots + a_k P_k(z)$ при произвольных значениях параметров $a_2, \ldots, a_k$. Бернацкий решил эту задачу для $k = 2$, доказав, что в этом случае $R = \max\{R_2, (p_1 R_2 + p_2 R_1)(p_2 - p_1)^{-1}\}$, причем это значение R точное (Biernacki M., Bull. Akad. polon. sci. et lett., Cl. sci. math., 1927, сер. A, 541—685).

Автор решает эту задачу в случаях $k = 3$ и $k = 4$. При $k = 3$ доказывается, что $R = (p_3 M + p_2 R_3) \times (p_3 - p_2)^{-1}$, где

$$M = \left\{\max\left[R_2, \frac{(2p_3 - p_2 + p_1) r + (p_1 + p_2) R_3}{2p_3 - p_2 - p_1}\right] + R_2\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{p_1/(p_2 - p_1)} + \frac{p_2 R_2 + p_1 R_1}{p_2 - p_1}, \quad r = R \text{ при } k = 2.$$

Еще более сложный вид имеет выражение для R при $k = 4$. Точно определяется значение R для многочлена частного вида

$$(z + P)^p + az^{p+1} + bz^{p+2},$$

где P (заданное) и a/b вещественны:

$$R = [p + 1 + \sqrt{p(p+1)/2}\,]\,|P|.$$

При доказательстве применяются принцип аргумента и теорема Руше.

А. Х. Турецкий

1731. О невещественных значениях тотально вещественной рациональной функции. С.-Надь

(Über die nichtreellen Werte einer totalreellen rationalen Funktion. Sz.-Nagy Gyula), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 1—2, 89—94 (нем.)

Рациональная функция $F(z) = g(z)/h(z)$ (вещественные многочлены $g(z)$ и $h(z)$ не имеют общих нулей) называется тотально вещественной, если $F(z)$ принимает вещественные значения только на вещественной оси. Ранее автор доказал (Acta sci. ent. math. Szeged, 1950, A12, 1—10), что все нули многочленов $g(z)$ и $h(z)$ вещественны и перемежаются. В реферируемой работе доказываются теоремы о значении $\arg F(z)$ в некоторых круговых областях. Дается также обобщение этих теорем на частное двух целых функций нулевого рода.

Автору, очевидно, осталась неизвестной работа Н. Г. Чеботарева (Докл. АН СССР, 1942, 35, 219—222), в которой доказана вещественность и перемежаемость нулей $g(z)$ и $h(z)$ не только для многочленов, но и для целых функций произвольного порядка (по терминологии Н. Г. Чеботарева, функции $g(z)$ и $h(z)$ образуют вещественную пару).

Теоремы 1—IV реферируемой работы и их обобщение на целые функции произвольного порядка непосредственно следуют из доказательства одной теоремы в работе референта (Докл. АН СССР, 1943, 40, 55—58), подробнее это изложено в монографии Н. Г. Чеботарева и референта (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 26, лемма II, стр. 142).

Н. Н. Мейман

1732. О моментах функций, голоморфных и ограниченных в угле. Суньер-и-Балагер (Sobre los momentos de las funciones holomorfas y acotadas en un angulo. Sunyer i Balaguer F.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, 13, № 4, 241—246 (исп.)

Доказана следующая теорема единственности: Пусть $f(t)$ голоморфна в угле $|\arg t| < \alpha\pi/2$ и ограничена во всяком внутреннем угле; если существует бесконечная последовательность $\{n_k\}$, для которой

$$\mu_n = \int_0^\infty |f(t)|\, t^n dt < \Gamma(\alpha' n + 1)$$

при любом $n \in \{n_k\}$ и каком-либо α', $0 < \alpha' < \alpha$, то $f(t) \equiv 0$.

Посредством конформного преобразования $t = [(1+s)/(1-s)]^\alpha$ доказательство сводится к теореме Мию (Milloux H., Mathematica (Cluj), 1931, 4, 182—185), в формулировке которой допущена опечатка: вместо $1+r$ нужно $1-r$. Пример показывает существенность требования ограниченности.

М. К. Фаге

1733. Асимптотические свойства функций экспоненциального типа. Боас (Asymptotic properties of functions of exponential type. Boas R. P., Jr), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 433—448 (англ.)

Излагаются теоремы Картрайт, Левинсона, Альфорса и Хейнса, Пфлюгера, С. Н. Бернштейна, М. Г. Крейна, Н. И. Ахиезера, Н. Н. Меймана и референта, относящиеся к целым функциям конечной степени и функциям конечной степени в полуплоскости, которые ограничены, в некотором смысле, на действительной оси.

Такими условиями ограниченности являются:

1. $|f(x)| \leqslant M$; 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |f(x)|}{1+x^2}\, dx$ существует;

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f(x)||}{1+x^2}\, dx < \infty$;

5. а) $\int_0^\infty \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{1+x^2}\, dx$ существует и

б) $h_f(0) = h_f(\pi) = 0$ $\left(h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-1} \ln |f(re^{i\theta})|\right)$;

6. $\sup\limits_{R>0} \left\{ \int_0^R \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{1+x^2}\, dx \right\} < \infty$;

7. $\sup\limits_{R>0} \left\{ \left| \int_0^R \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{1+x^2}\, dx \right| \right\} < \infty$.

Каждое из условий 1—5 влечет особую регулярность роста функции $f(z)$. Именно, внутри любого угла $|\theta - \pi/2| \leqslant q < \pi/2$, но вне исключительных кружков, образующих множество нулевой плотности, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln |f(re^{i\theta})| = c \sin\theta = h_f(\theta). \qquad (1)$$

Условия 6 и 7 эквивалентны для целых функций конечной степени и эквивалентны условию

8. $\sum |\operatorname{Im}(1/z_k)| < \infty$,

в котором z_k — все нули $f(z)$.

В реферируемой статье делается подробный анализ результатов названных авторов и проводится сравнение условий 1—7.

Указанные результаты доказываются с помощью формулы Неванлинна, дающей представление функции, голоморфной в полукруге. Этот метод дает возможность несколько ослабить условие 5б), заменив его на $\int_r^{2r} t^{-1} \ln |f(\pm t)|\, dt \leqslant o(r)$.

Кроме того, автор несколько усиливает известные результаты, показывая, что предел (1) существует, если вместо отбрасывания кружков нулевой плотности отбросить множество E значений r конечной логарифмической меры (т. е. такое, что $\int_E x^{-1} dx < \infty$). Этот вывод основан на аналогичной теореме Альфорса и Хейнса, относящейся к произведению Бляшке

$$\prod(z) = \prod_{k=1}^\infty (1 - z/z_k)\,(1 - z/\bar{z}_k)^{-1}$$
$$\left(\sum_1^\infty |\operatorname{Im} 1/z_k| < \infty\right).$$

Библиография, 37 названий.

Примечание референта. При анализе условий 1—8 автор в одном месте (стр. 435) допускает неточность, утверждая, что если выполнено условие (1) для целой функции экспоненциального типа, то выполнены и условия 5. Это верно лишь при дополнительном требовании 8.

Б. Я. Левин

1734. О направлениях Бореля — Валирона, общих для целой функции и ее последовательных производных и интегралов. Суньер-и-Балагер (Sur les directions de Borel — Valiron communes à une fonction entière, à ses dérivées et à ses intégrales successives. Sunyer i Balaguer Ferran), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 23, 2196—2198 (франц.)

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ и пусть $\rho(r)$ — ее «точный порядок» (определение см.,

например, Valiron G., Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, 1923). Пусть Δ — луч: $\arg z = \text{const} = \varphi_0$, а $r_n(\Delta, \varepsilon, a)$ — модули a-точек $f(z)$, расположенных в угле $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$, и пусть $U(r) = r^{\rho(r)}$. Δ называется направлением Бореля — Валирона функции $f(z)$, если для всех a, $|a| < \infty$, за возможным исключением одного, $\Sigma \{U[r_n(\Delta, \varepsilon, a)]\}^{-1+\eta} = \infty$, какими бы малыми мы ни выбрали ε и η. Пусть $n(r, \Delta, \varepsilon, \overline{a})$ — число a-точек $f(z)$ в секторе $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$, $|z| < r$. Δ называется направлением Бореля — Валирона максимального рода, если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left[\frac{n(r, \Delta, \varepsilon, a)}{U(r)}\right] > 0$$

при произвольно малом ε для всех a, за возможным исключением одного (Valiron G., Directions de Borel des fonctions méromorphes. Mém. sci. math., № 89, Paris, 1938).

Отмечается, что относящиеся к направлениям Бореля — Валирона результаты Мию, главный из которых утверждает в случае $\infty > \rho > 0$ наличие направления Бореля — Валирона, общего для целой функции и ее последовательных производных и интегралов (Milloux H., J. analyse math., 1951, **1**, 244—330; C. r. Acad. sci., 1950, **231**, 402—403; 1951, **232**, 296—297), остаются справедливыми, если в их формулировке заменить направления Бореля — Валирона на направления Бореля — Валирона максимального рода, и формулируется одна новая теорема из этого круга вопросов. Кроме того, приводится без доказательства теорема, утверждающая наличие направления Бореля — Валирона максимального рода, общего для целой функции и ее последовательных производных и интегралов, если эта целая функция представима лакунарным степенным рядом, на который наложен ряд ограничений. *А. А. Гольдберг*

1735. Об исследовании первичного ядра и о теореме делимости целых функций n переменных. Лелон (Sur l'étude des noyaux primaires et sur un théorème de divisibilité des fonctions entières de n variables. Lelong Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 22, 1379—1381 (франц.)

Автор, используя развитый им метод (в частности, РЖМат, 1954, 3684), дает, во-первых, представление целой функции F n переменных с наперед заданным многообразием нулей W^{n-1} через потенциал с первичным ядром и, во-вторых, устанавливает, что если W^{n-1} имеет индикатрису возрастания конечного порядка, то всякая целая функция, обращающаяся в нуль на W^{n-1}, делится на F. Это положение выражено следующей теоремой:

Если данные нули W^{n-1} в пространстве C^n не содержат начала и имеют индикатрису $\nu(t)$ конечного порядка λ, то существует целая функция F порядка λ, обращающаяся в нуль на W^{n-1}; она определяется формулами

$$\ln|F(z)| = k_n^{-1} \int d\sigma(a)\, e_n(a, z, q),$$

$$\ln F(z) = 2k_n^{-1} \int d\sigma(a) \int_{Oz} d_z e_n(a, z, q) + \log F(0),$$

где Oz — путь на $C^n \setminus W^{n-1}$, q — целая часть λ, $e_n(a, z, q)$ — первичное ядро q-рода, получаемое с точностью до знака из разложения ядра $|a - z|^{2-2n}$ в ряд по однородным полиномам по $(z_i, \overline{z}_\alpha)$ путем выбрасывания первых членов степени $\leqslant q$, где $|a| \neq 0$, $z \neq a$. Всякая целая функция, обращающаяся в нуль на W^{n-1}, делится на F. Подробного доказательства теоремы не приводится.

А. А. Темляков

1736. Устойчивость в теореме Лиувилля. Лаврентьев М. А., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 5, 925—926

Рассматривается отображение f трехмерной области D в трехмерное же евклидово пространство E^3, задаваемое дифференцируемыми функциями, все частные производные первого порядка которых удовлетворяют на D условию Гёльдера с постоянной $k > 0$ и показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$. Предполагается, что якобиан отображения f положителен в D. Через $p = p(x, y, z) \geqslant 1$ обозначается отношение наибольшей оси к наименьшей оси эллипсоида, являющегося образом при отображении f бесконечно малой сферы с центром в точке $(x, y, z) \in D$.

Отображение L называется лиувиллевским, если оно сводится к последовательному применению преобразований подобия, сдвига и инверсии. Утверждается, что для всякого вышеуказанного отображения f единичного шара $Q \subset E^3$ на его часть такого, что $0 \leqslant p - 1 < \varepsilon$, существует лиувиллевское отображение L шара Q такое, что в шаре Q_r радиуса $r < 1$, концентрическом с Q, имеет место

$$|f(A) - L(A)| < \mu(\varepsilon, k, \alpha, r), \quad A \in Q_r,$$

где $\mu(\varepsilon, k, \alpha, r)$ — универсальная функция, причем $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu(\varepsilon, k, \alpha, r) = 0$.

Указывается также, что если отображение f бесконечного единичного цилиндра $C = \{y^2 + z^2 < 1\} \subset E^3$ на его часть обладает осевой симметрией и если $0 \leqslant p - 1 < \varepsilon$, то существует линейное отображение L такое, что

$$|f(A) - L(A)| < \mu(k, \alpha, x)\varepsilon,$$

где μ — универсальная функция. При этом в условиях теоремы правую часть неравенства можно заменить выражением $\lambda(x)\nu(\varepsilon)$, где $\lambda(x)$ и $\nu(\varepsilon)$ — две универсальные функции ($\lim_{\varepsilon\to 0} \nu(\varepsilon) = 0$).

Л. Д. Кудрявцев

1737 К. Теория и применение комплексного переменного. Введение. Грин (The theory and use of the complex variable: an introduction. Green Stanley Lawson, 2-nd ed., VIII+136 p., tables, diagrs., bibliogr., London, Pitman, 1953, 15 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1953, № 202, 10 (библ.)

См. также: 1610, 1612, 1624, 1749, 1750, 1752, 1788, 1824, 1825, 1828, 1837, 1843, 1844

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1738. Об одном методе доказательства разрешимости задачи Коши. Женхэн О. Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 143—146

При помощи принципа сжатых отображений доказывается, что если функция f непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} (i = 0, 1, \ldots, n-1)$, если

$$(x-a) N \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(n-k-2)!} (x-a)^{n-k-1} + 1 \right] < 1$$

$(N = \text{const})$.

Утверждается, что при достаточно малых $|\lambda_j|$ аналогично может быть доказано существование и единственность решения $y(x)$ интегро-дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda_j \prod_{i=1}^{l_j} \int\limits_{A_{ij}} K_{ij}\, du_i\right)$$

$(j = 1, 2, \ldots, p;\ u_0 = x; n \geqslant m_{ij})$,

где $K_{ij} \equiv K_{ij}(u_{i-1}, u_i, y(u_i), \ldots, y^{(m_{ij})}(u_i))$

$$\text{и} \prod_{i=1}^{l_j} \int\limits_{A_{ij}} K_{ij}\, du_i =$$

$$= \int\limits_{A_{1j}} K_{1j} \left\{ \int\limits_{A_{2j}} K_{2j} \left[\ldots \int\limits_{A_{l_j j}} K_{l_j j}\, du_{l_j} \ldots \right] du_2 \right\} du_1,$$

на отрезке $A \supset \bigcup\limits_{i,j} A_{ij}\ (A_{0j} = A)$.

Условия, налагаемые на функции F и $K_{ij}(u_i \in A_{ij})$, аналогичны условиям для f.

В работе имеются опечатки. Так, неравенства

$$y_{ia} - \delta_i \leqslant y_i \leqslant y_{ia} + \delta_i$$
$$(\delta_i > 0;\ i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

следует заменить неравенствами $-\infty < y_i < +\infty$. В условии, обеспечивающем сжатие оператора L, $(n-1)$ следует заменить на $(n-2)$, $(n-k-2)$ на $(n-k-1)$. Абсолютное значение при $(x-a)$ является излишним. *Н. И. Бриш*

1739. Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения. Далецкий Ю. Л., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 5, 881—884

Дано уравнение

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{dq(t)}{dt} = iB(\tau, \varepsilon) q(t) + p(\tau, \varepsilon) e^{i\vartheta(t,\varepsilon)} \quad (\tau = \varepsilon t), \tag{1}$$

где ε — малый параметр, q — неизвестный вектор гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$ — заданные линейные операторы, определенные в $\mathfrak{H}$, $p(\tau, \varepsilon)$ — заданный вектор. Предполагается, что допустимы разложения

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau);$$
$$B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau); \tag{2}$$
$$p(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(\tau)$$

и что $\dfrac{d\vartheta(\tau, \varepsilon)}{dt} = h(\tau)$, а $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$, $p_k(\tau)$, $h(\tau)$ имеют достаточное число производных при $0 \leqslant \tau \leqslant L$. $A_0(\tau)$ — ограниченный положительный оператор, и на $[0, L]$ существует ограниченный оператор $A_0^{-1}(\tau)$.

Получено асимптотическое представление решения уравнения (1) в виде

$$q(t, \varepsilon) = \exp i\vartheta(t, \varepsilon) \times \left(\sum_{j=1}^{n} V_j(\tau, \varepsilon) \eta_j(t, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon) \right).$$

Операторы $V_j(\tau, \varepsilon)$ и вектор $f(\tau, \varepsilon)$ пространства $\mathfrak{H}$ допускают представления, аналогичные разложениям (2), коэффициенты которых $V_{jk}(\tau)$ и $f_k(\tau)$ определяются из некоторых рекуррентных соотношений. Векторы $\eta_j(t, \varepsilon)$, принадлежащие определенным подпространствам $\widetilde{\mathfrak{H}}(\tau) \subset \mathfrak{H}$, находятся из уравнений

$$\frac{d\eta_j(\tau, \varepsilon)}{dt} = \mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon) \eta_j(t, \varepsilon) + b_j(\tau, \varepsilon)$$
$$(j = 1, \ldots, n),$$

коэффициенты которых также рассматриваются как разложения по степеням ε и определяются из рекуррентных соотношений.

Пусть $q^m(t, \varepsilon)$ — часть вектора $q(t, \varepsilon)$, соответствующая m первым членам разложений для V_j, f, $\mathfrak{A}$, b_j, и пусть

$$A^{(k)}(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{k+1} = A(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i A_i(\tau)$$

($B^{(k)}(\tau, \varepsilon)$ и $p^{(k)}(\tau, \varepsilon)$ определяются аналогично).

Теорема. Если $\operatorname{Im}(B_0(\tau) x, x) \geqslant 0$ при любом x и функции $A_i(\tau)$, $B_i(\tau)$, $p_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, n)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $0 \leqslant \tau \leqslant L$ имеют непрерывные производные порядка $m - i + 1$, а $A^{(m)}$, $B^{(m)}$, $p^{(m)}$ непрерывны, то для векторов $q(t, \varepsilon)$, $q^{(m)}(t, \varepsilon)$, взятых при равных начальных условиях, справедлива оценка

$$\| q(t, \varepsilon) - q^{(m)}(t, \varepsilon) \| < C_m \varepsilon^{m-1}$$
$$(\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_0,\ 0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon).$$

где C_m и ε_1 — постоянные. Указано, что в частных случаях оценку можно улучшить. Приведен пример, иллюстрирующий метод.

Решено операторное уравнение

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} S^i X T^k = F,$$

если S, T, F — ограниченные операторы и выполнены некоторые дополнительные условия, связанные со спектрами S и T, $a_{ik} = \text{const}$.

Статья обобщает работы С. Ф. Фещенко (Доповіді АН УРСР, 1949, № 1, 11—17). Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна (Укр. матем. ж., 1950, 2, № 47, 71—81). *Г. Л. Мизернюк*

1740. Об одном критерии устойчивости Ляпунова. Зламал Милош, Чехосл. матем. ж., 1953, 3, № 3, 257—264 (русс.; резюме нем.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\, y = 0, \qquad (1)$$

где $p(t)$ — действительная непрерывная периодическая функция с периодом ω. Доказываются две теоремы устойчивости в смысле Ляпунова тривиального решения уравнения (1).

Теорема 1. Если выполнено неравенство

$$\int_0^{\omega} |\, p(t) - c^2 \,|\, dt < 2c \min\left\{ \left|\, \sin\frac{c\omega}{2} \,\right|, \left|\, \cos\frac{c\omega}{2} \,\right| \right\},$$

где

$$\frac{n\pi}{\omega} < c < \frac{(n+1)\pi}{\omega} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то все решения уравнения (1) ограничены ($-\infty < t < \infty$).

Теорема 2. Если $p(t) \geqslant c^2 > 0$ и выполнено неравенство

$$\int_0^{\omega} p(t)\, dt < c^2\omega + 2c \left| \cos\frac{c\omega}{2} \right|,$$

где

$$\frac{2n\pi}{\omega} \leqslant c < \frac{(2n+1)\pi}{\omega},$$

или

$$\int_0^{\omega} p(t)\, dt < c^2\omega + 2c \left| \sin\frac{c\omega}{2} \right|,$$

где

$$\frac{(2n+1)\pi}{\omega} \leqslant c < \frac{(2n+2)\pi}{\omega}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$), то все решения уравнения (1) ограничены ($-\infty < t < \infty$).

Примечание референта. Обе теоремы автора не являются новыми, так как более общие результаты имеются в работах В. А. Якубовича (См., например, Старжинский В. М., Прикл. матем. и механика. 1954, 18, № 4, 469—510; Якубович В. А., Докл. АН СССР, 1950, 74, № 5. 903).
В. М. Старжинский

1741. Ограниченные решения и периодические решения некоторых нелинейных уравнений второго порядка. Барбэлат (Soluţii mărginite şi soluţii periodice pentru anumite ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Barbălat I.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 3, 393—402 (рум.; резюме русс., франц.)

Используя методы, развитые Лефшецом и Левинсоном, автор обобщает теоремы Рейтера и Лангенхопа (Reuter G. E. H., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1951, 47, № 1, ч. 1-а, 49—54. Langenhop C. E., J. Math. and Phys., 1951, 30, № 1, 36—39).

Теорема: Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y.\ \dot{y} = -f(x, y)\, y - g(x) + e(t). \qquad (1)$$

Функции e, f, g непрерывны и e ограничена; существует такое $a > 0$, что $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$ при $|x| > a$; если $|y| > a$, $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x, y)\,|y| = \infty$, то существует такое $M > 0$, что $f(x, y) > -M$ при $x > a$ и $0 \leqslant y \leqslant a$ или $x < -a$ и $-a \leqslant y \leqslant 0$.

Тогда. а) существует постоянная $K > 0$, зависящая только от функций f, g и e, такая, что для всякого решения $x(t)$ системы (1) $|x(t)| < K$, $|\dot{x}(t)| < K$, коль скоро $t > T$, T — некоторое число; б) если e — периодическая функция периода ω, а f и g обеспечивают единственность решений, то система имеет по крайней мере одно решение периода ω. Автор не ссылается на работы Рейтера и Картрайт (Reuter G. E. H., J. London Math. Soc., 1952, 27, № 1, 48—58; Cartwright, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton, 1950, 1, 146—162), в которых устанавливаются вполне аналогичные утверждения. *В. В. Немыцкий*

1742. Асимптотическое решение уравнения гидродинамической устойчивости в области, содержащей переходную точку. Вазов (Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. Wasow Wolfgang), Ann. Math., 1953, 58, № 2, 222—252 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 4827.

1743. О циклах для систем в полных дифференциалах. Пини (Sui cicli relativi ai sistemi ai differenziali totali. Pini Bruno), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 38—63 (итал.)

Как и в предыдущей работе автора (РЖМат, 1953, 744), рассматривается вполне интегрируемая система уравнений (записанная в указанном реферате неточно)

$$dx_i = a_i(x_1, x_2, x_3)\, du + b_i(x_1, x_2, x_3)\, dv \quad (i = 1, 2, 3)$$

с коэффициентами, аналитическими в некоторой области вещественного пространства x_1, x_2, x_3. Циклом этой системы называется любая замкнутая интегральная поверхность, на которой нет особых точек системы; такая поверхность по необходимости гомеоморфна поверхности тора. Утверждается, что интегральные линии систем уравнений $dx_i = a_i du$ ($i = 1, 2, 3$) и $dx_i = b_i dv$ ($i = 1, 2, 3$), расположенные на поверхности цикла, замкнуты и не

могут ограничивать односвязной области. Далее рассматривается поведение интегральных поверхностей, проходящих через точки, расположенные вблизи цикла, причем доказываются теоремы, аналогичные известным теоремам Бендиксона о поведении интегральных кривых вблизи замкнутой интегральной кривой на плоскости. На основании этого доказывается существование особых точек внутри цикла (конечно, если система уравнений задана всюду внутри цикла). Изучается строение множества особых точек 1-го и 2-го рода, расположенных внутри цикла; при некоторых дополнительных предположениях доказывается, что множество таких особых точек 2-го рода конечное, а множество точек 1-го рода расположено на конечном числе аналитических дуг, тип которых рассматривается. Приведены примеры.

Отметим, что основные предложения в работе обоснованы недостаточно. Некоторые утверждения не верны (о замкнутости интегральных линий на поверхности цикла, утверждения на стр. 47 и 51). *А. Д. Мышкис*

1744. Дифференциально-разностное уравнение $F'(x)=e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II. Брёйн (The difference-differential equation $F'(x)=e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II, B r u i j n N. G. d e), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 5, 449—458; 459—464 (англ.)

Развиваются исследования Малера (Mahler K., J. London Math. Soc., 1940, **15**, 115—123) и автора (Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1948, **A51**, 659—669; Amer. J. Math., 1949, **71**, 313—330). Изучаются свойства комплексных решений уравнения

$$\Lambda F(x) \equiv F'(x) - e^{\alpha x+\beta} F(x-1) = 0, \qquad (1)$$

где x и $\alpha > 0$ вещественные, а β комплексное. В основу кладется свойство сопряженных уравнений: если $F(x)$ кусочно-непрерывна при $x \geqslant B-1$ и удовлетворяет уравнению (1) при $x \geqslant B$, а $G(x)$ кусочно-непрерывна при $x \leqslant C+1$ $(B < C)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Lambda^* G(x) \equiv -G'(x) - e^{\alpha x+\alpha+\beta} G(x+1) = 0 \qquad (2)$$

при $x \leqslant C$, то «скалярное произведение»

$$\{F, G\} = F(x)\,G(x) + \int_{x-1}^{x} e^{\alpha t+\alpha+\beta} F(t)\,G(t+1)\,dt$$

не зависит от x при $B \leqslant x \leqslant C$. Автор строит функцию Грина $K(y, x)$ как решение уравнения (1) при $x \geqslant y$, для которого $K(y, x) = 0$ $(x < y)$, $K(y, y) = 1$; для этой функции получается явное выражение. При помощи функции Грина любое решение уравнения (1) $(x \geqslant B)$ можно представить в виде

$$F(x) = F(B)\,K(B, x) + \int_{B-1}^{B} e^{\alpha t+\alpha+\beta} F(t)\,K(t+1, x)\,dt. \qquad (3)$$

Вводятся последовательности целых функций, удовлетворяющих уравнениям (1) и соответственно (2) на всей комплексной плоскости ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{1+i\infty} P(x, z)\,dz / \Gamma(z+1),$$

$$G_n(x) = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(z)\,dz / (2\pi i\,P(x, z)),$$

где

$$P(x, z) = \exp(\alpha z\,x + \alpha z/2 - \beta z - z\ln\alpha - \alpha z^2/2 + 2\pi n i z).$$

При помощи преобразования интегралов выводятся некоторые асимптотические выражения для $F_n(x)$ и $G_n(x)$, откуда, в частности следует, что $\{F_n, G_m\}=0$ $(n \neq m)$, $\{F_n, G_n\} = 1$, а также, что

$$K(y, x) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n(x)\,G_n(y)$$

$(x > y$ или $y - 1 < x < y)$.

Подробно изучается характер сходимости этого ряда, откуда при помощи формулы (3) получается, что

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \{F, G_n\}\,F_n(x) \quad (x > B+1),$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на всяком отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ $(a > B+1)$. Обозначим далее

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \{F, G_n\} \exp\left[2\pi n i(\pi n i + \alpha/2 + \beta - \ln\alpha + \alpha t)/\alpha\right];$$

функция $\psi(t)$ периодична с периодом 1 и аналитична в полосе $|\operatorname{Im} t| < \pi/2\alpha$. Через нее получается асимптотическое представление решения

$$F(x) = F_0(x)\,\{\psi[x - (\ln x)/\alpha] + (\ln x)/\alpha^2 x\} + O(x^{-1})\};$$

этот результат также исследуется в различных направлениях.

Автор указывает, что развитые методы применимы к некоторым специальным уравнениям иного вида. Опечатка: на стр. 449, строка 5 снизу, должно быть $F(B)$ вместо $f(B)$. *А. Д. Мышкис*

1745. О вынужденных колебаниях материальных точек, закрепленных на равных расстояниях на струне. О к а б е (On a forced lateral vibration of a number of particles attached to a string at equal intervals. O k a b e J u n - i c h i), Repts Res. Inst. Appl. Mech., 1953, **2**, № 7, 147—149 (англ.)

Рассматриваются уравнения

$$\mu\ddot{\psi}_n = Ta^{-1}\{(\psi_{n+1} - \psi_n) + (\psi_{n-1} - \psi_n)\} + Q_n e^{ipt},$$

описывающие вынужденное колебание системы материальных точек, закрепленных на равных расстояниях на безинерционной струне, имеющей постоянное натяжение T. Амплитуды φ_n вынужденного колебания $\psi_n = \varphi_n e^{ipt}$ определяются отношением

$\varphi_n = H(N, n)/G(N)$, где H и G определители

$$G(N)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & x & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & 1 & x & \end{vmatrix};$$

$$H(N,n)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & Q_1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & x & 1 & \cdot & \cdot & 0 & Q_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & Q_n & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & Q_N & 0 & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

(n — номер столбца, в котором стоит Q_n)

Здесь $x = \mu a p^2 T^{-1} - 2$. Показывается, что определитель H может быть выражен через миноры определителя G при помощи соотношения

$$H(N,n) = \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{n-m} Q_m G(N-n)\, G(m-1) + \sum_{m=n}^{N} (-1)^{m-n} Q_m G(N-m)\, G(n-1).$$

М. А. Айзерман

1746 К. Небесная механика (Канонические уравнения и метод вариации произвольных постоянных). Шази (Mécanique céleste (Équations canoniques et variations des constantes). Chazy Jean, 270 pp., Paris, Presses Universitaires de France, 1953, 1300 fr.) (франц.)

Книга является учебным курсом, трактующим некоторые избранные вопросы небесной механики, связанные главным образом с каноническими преобразованиями и вариационными принципами. Не претендуя на сколько-нибудь полное изложение предмета, она может служить хорошим математическим введением в классическую теорию возмущений. Этой теории предпосылается теорема Пуанкаре, при помощи которой обосновывается метод последовательных приближений. Сама теория возмущений скорее иллюстрируется на простых примерах, чем излагается в применении к практическим задачам небесной механики. Часть книги посвящена изложению теории поправок, вносимых общей теорией относительности в движение планет. В главе 1, «Канонические уравнения и их обобщения», после вывода обычных условий каноничности преобразования, выраженных при помощи скобок Пуассона, скобок Лагранжа и условий Якоби, рассматривается обобщение канонических преобразований.

В главе 2, «Приложения вариационного исчисления», рассматриваются условия стационарности интеграла $I = \int_{t_0}^{t_1} f\, dt$ и дается вывод уравнений Эйлера, соответствующих различным f. Принципы Гамильтона и Мопертюи прилагаются к различным задачам динамики точки и, в частности, к определению геодезических линий на поверхности. Изложены небесно-механические следствия общей теории относительности.

Глава 3 посвящена изложению теоремы Пуанкаре о разложимости решения системы дифференциальных уравнений по целым степеням малого параметра ε в области $0 \leqslant t \leqslant T$. Дается понятие об уравнениях в вариациях и об их основных свойствах. В качестве примера приложения теоремы Пуанкаре дается новый вывод релятивистского движения перигелия. В главе 4, «Теорема Якоби и эллиптическое движение», излагается метод Якоби интегрирования канонических систем; проводится решение задачи двух тел в эллиптическом случае и определяются две системы канонических элементов.

В главе 5, «Метод вариации постоянных», вариация произвольных постоянных уравнений небесной механики трактуется как частный случай метода вариации постоянных для произвольных систем.

В главе 6, «Приложения уравнений теории возмущений», рассматривается задача о возмущающем действии силы $F = -\alpha\mu/r^3$, где α — малый параметр. Изучается возмущающее силовое поле, имеющее ось вращения и плоскость симметрии, перпендикулярную этой оси. *Г. А. Мерман*

1747 Д. Проблемы различения для некоторых особых точек первой группы. Хаимов Н. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механ. АН ТаджССР, Сталинабад, 1953.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1748. Современная теория потенциала, Брело (La théorie moderne du potentiel. Brelot M.), Ann. Inst. Fourier, 1952, 4, 113—140 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Краткое изложение и библиография основных работ по теории потенциала и задаче Дирихле за последние 20—30 лет. По теории потенциала особо отмечаются работы Фростмана (Frostman, 1935), Картана (H. Cartan, 1941—1946), Дени (Deny, 1950—1952), а по задаче Дирихле — работы Винера (Winer, 1924—1925), Брело (Brelot, 1944—1952), Валле Пуссена (Wallée Poussin, 1937—1949).

Х. Л. Смолицкий

1749. О некоторых вопросах равномерной аппроксимации решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Гагуа М. Е., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 2, 177—184

Доказываются теоремы о равномерной аппроксимации в замкнутой области решения дифференциального уравнения

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0$$

(Δ — оператор Лапласа, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — целые функции действительных аргументов x, y). Аппроксимация производится определенными частными решениями того же уравнения (Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948, гл. 2). *Г. Ф. Манджавидзе*

1750. Задача Дирихле теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в случае разомкнутого контура. Плуме З. Я., Изв. АН ЛатвССР, 1954, № 2, 129—136

Рассматривается дифференциальное уравнение эллиптического типа

$$E(u) \equiv \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0,$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — действительные аналитические функции в области S, представляющей

собой плоскость $z = x + iy$, разрезанную вдоль разомкнутой дуги L.

В работе решается задача Дирихле для этого уравнения (на краях L задаются граничные значения u). Голоморфная функция, входящая в общее представление решений (Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948), выражается при помощи интеграла типа Коши, тем самым задача приводится к сингулярному интегральному уравнению. *Г. Ф. Манджавидзе*

1751. Замечания по поводу некоторых уравнений в частных производных второго порядка вида $\Delta u + A(x,y)u = 0$. Буланже (Remarques sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme $\Delta u + A(x, y)u = 0$. Boulanger J.), Mathesis, Paris, 1953, 62, № 3—4—5, 89—99 (франц.)

Рассматриваются непрерывные решения, обращающиеся в нуль на границе некоторой области D, приведенных ниже уравнений.

Легко проверяется, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \eta u = 0, \qquad (1)$$

где $K(x, y) > 0$; $\eta(x, y) \leqslant 0$ в $\overline{D}$, имеет только нулевое решение. Положив $V(x, y) = u(x, y)\sqrt{K(x, y)}$, можно сопоставить каждое решение u уравнения (1) с решением V уравнения

$$\Delta V + A(x, y)V = 0, \qquad (2)$$

где $$A = \frac{1}{4K^2}\left[4K\eta + \left(\frac{\partial K}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial y}\right)^2 - 2K\Delta K\right].$$

При соблюдении указанных условий для K и η уравнение (2) также будет иметь только нулевое решение.

Далее рассматриваются различные типы функций K и определяются области, в которых, несмотря на то, что $A \geqslant 0$, уравнение (2) имеет только нулевое решение (например, K — произвольная гармоническая функция, линейная или билинейная функция и т. п.).

Автор отмечает, что применение общего критерия, данного Шварцем, в ряде случаев связано со значительными трудностями. *А. А. Дезин*

1752. Принцип Фрагмена — Линделёфа для эллиптических дифференциальных уравнений. Серрин (On the Phragmén-Lindelöf principle for elliptic differential equations. Serrin J. B.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 3, 395—413 (англ.)

Пусть

$$Lu \equiv au_{xx} + 2bu_{xx} + cu_{yy} + du_x + eu_y,$$

коэффициенты определены в некоторой области D, расположенной в полуплоскости $y \geqslant 0$, причем существует постоянная $k > 0$ такая, что

$$\frac{a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2}{a + c} \geqslant k(\lambda^2 + \mu^2)$$

во всех точках D и для всех действительных λ и μ, и существует убывающая функция $p(r)$ $(r = x^2 + y^2)$ такая, что

$$\int_0^\infty p(r)\,dr < +\infty \quad \text{и} \quad \frac{(d^2 + e^2)^{\frac{1}{2}}}{a + c} \leqslant p(r). \qquad (1)$$

В остальном коэффициенты a, b, c, d, e могут быть произвольными, даже разрывными и неограниченными. $u(z)$ и $v(z)$ $(z = (x, y))$ дважды непрерывно дифференцируемы в D. $M(R) = \max\limits_{z \in D\ |z| = R} u(z)$, $m(Y) = \min\limits_{z \in D\ y = Y} v(z)$. Граница D_1 области D целиком расположена в полосе $0 \leqslant y \leqslant \sigma$.

Если $L(u) \geqslant 0$ в D и $\varlimsup\limits_{z \to z_0} u(z) \leqslant 0$, $z \in D$, $z_0 \in D_1$; $L(v) \leqslant 0$ и $v \geqslant 0$ в D, то существуют $\alpha = \lim\limits_{R \to \infty} \frac{M(R)}{R}$ и $\beta = \lim\limits_{Y \to \infty} \frac{m(Y)}{Y}$; $\alpha \geqslant 0$, β конечно (очевидно $\beta \geqslant 0$), и $\beta u \leqslant \alpha v$ в D.

В случае, когда $\beta u = \alpha v$, $u = \alpha\psi$ и $v = \beta\psi$; если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, $\psi(z)$ определяется единственным образом из условий: $L(\psi) = 0$, $\psi = 0$ на D_1, $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{\psi}{y} = 1$ равномерно по x, ψ ограничено в каждой полосе $0 \leqslant y \leqslant \sum$.

Если заранее известно существование функции ψ, удовлетворяющей последним условиям, то устанавливается соотношение $\frac{u}{\alpha} \leqslant \psi \leqslant \frac{v}{\beta}$.

Теорема является обобщением на случай эллиптических уравнений второго порядка теоремы Фрагмена — Линделёфа в форме, приданной этой теореме Гейнсом (Heins). Указывается, что теорема переносится на случай n-независимых переменных.

Исследуется также случай, когда коэффициенты не удовлетворяют условию (1). В этом случае автор ограничивается уравнением

$$\Lambda(u) \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + c\left(u_{yy} - m\frac{u_y}{y}\right) = 0$$

(постоянная $m > 0$) и доказывает теорему: пусть $u(z)$ непрерывна, удовлетворяет неравенству $\Lambda(u) \geqslant 0$ при $y > 0$ и $u \leqslant 0$ на $y = 0$. Тогда существует $\alpha = \lim\limits_{R \to \infty} \frac{M(R)}{R^{m+1}}$, α не отрицательно, и $u \leqslant \alpha y^{m+1}$ для $y \geqslant 0$.

Если равенство имеет место в одной точке, оно имеет место всюду. *Б. В. Боярский*

1753. Об одной граничной задаче для полигармонических функций. Касимов Д. М., Тр-Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 119—138

Рассматривается следующая задача. Пусть T — односвязная конечная плоская область, ограниченная замкнутым контуром l, имеющим непрерывную кривизну. Требуется найти регулярную n-гармоническую функцию $u(x, y)$ в области T по граничным условиям

$$\sum_{\mu + \nu = 2n - k} a^k_{\mu\nu}(s)\left[\frac{\partial^{\mu+\nu} u(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right]^+ = b_k(s) \quad (\text{на } L),$$

где $a^k_{\mu\nu}(s)$, $b_k(s)$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2n-k,\ k = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные вещественные однозначные функции, удо-

влетворяющие условию Гельдера; $[]^+$ означает предел величины, находящейся в скобках, на границе L. Автор сначала записывает общее решение полигармонического уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u(x,y)=0$$

в комплексной форме, затем, используя формулу И. Н. Векуа об интегральном представлении H_n-голоморфных функций (Сообщ. АН ГрузССР, 1941, 2, № 6, 477—483), приводит задачу к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений. Применяя известную теорию системы сингулярных интегральных уравнений, автор дает необходимые и достаточные условия разрешимости поставленной задачи. Далее указываются некоторые достаточные признаки разрешимости задачи. *Н. П. Векуа*

1754. К теории вырождающихся эллиптических уравнений. Михлин С. Г., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 2, 183—185

В области Ω, расположенной в полупространстве $x_m>0$ с примыкающей к $x_m=0$ частью границы Γ (остальная часть границы обозначена через Γ'), рассматривается уравнение

$$Lu\equiv-\sum_{i,k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_m}\left(A_{mm}\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=f(x),$$

эллиптическое в точках с $x_m>0$ и вырождающееся при $x_m=0$. Различаются два типа вырождения:

I) на Γ $A_{mm}\geqslant\varkappa>0$; $F\equiv\sum_{i,k=1}^{m-1}A_{ik}\xi_i\xi_k>0$,

если $\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i^2=1$.

II) На Γ $A_{mm}=0$; форма F не обязательно вырождена.

На Γ' задается граничное условие $u|_{\Gamma'}=0$, а на Γ — такое, чтобы имела место формула

$$(Lu,u)=\int_\Omega\left[\sum_{i,k=1}^{m-1}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{mm}\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2\right]\ldots \quad (1)$$

При этих условиях исследуются некоторые спектральные свойства оператора $\tilde{L}$, который является самосопряженным расширением L (построенным по Фридрихсу).

В случае вырождения типа I формула (1) имеет место, если $u|_\Gamma=0$ или $\frac{\partial u}{\partial x_m}\Big|_\Gamma=0$, причем соответствующие операторы $\tilde{L}_{\mathrm{I}}$ или $\tilde{L}'_{\mathrm{I}}$ положительно-определенные и их спектры дискретны. В случае вырождения типа II предполагается, что $A_{mm}(x)\geqslant Cx_m^\beta$, $C>0$. При этом в случае $\beta<1$ на Γ задается условие $u|_\Gamma=0$ или $\lim_{x_m\to0}x_m^\beta\frac{\partial u}{\partial x_m}=0$. При $\beta\geqslant1$ никаких условий на поверхности вырождения не задается. При $\beta<2$ соответствующие самосопряженные расширения являются положительно-определенными операторами с дискретным спектром. Если $\beta>2$, функция $x_m^{-\beta}A_{mm}(x)$ ограничена и существует такая непрерывная функция $\psi(x_m)$, что $\psi(0)=0$ и $F(\xi)\leqslant\psi(x_m)\sum_{i=1}^m\xi_i^2$, $x\in\bar{\Omega}$, то оператор $\tilde{L}_{\mathrm{II}}$ не положительно-определенный и его спектр недискретен. *М. И. Вишик*

1755. Об оценке электростатической емкости. Гарабедян, Шиффер (On estimation of electrostatic capacity. Garabedian P. R., Schiffer M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 206—211 (англ.)

Рассматривается конечная трехмерная область D, содержащая внутри начало координат и ограниченная кусочно гладкой поверхностью S; $G(x,y,z)$ — функция Грина области D с полюсом в начале координат. Значение $G-\frac{1}{r}$, $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ в начале координат названо обратной емкостью γ области D относительно начала. Если V — объем области, то $V\gamma^3$ — безразмерная величина. Пусть D_a — область, полученная из D прибавлением шара $r<a$. Показывается, что $V\gamma^3$ для D_a есть невозрастающая функция a. Указывается, что $V\gamma^3$ для пересечения D с шаром $r<a$ есть неубывающая функция a. Кроме того, показывается, что сфера является единственной поверхностью, для которой $\frac{\partial G}{\partial n}=\mathrm{const}$.

Далее рассматривается конечная поверхность S, ограниченная кривой C. Предполагается, что существует такая касательная к S плоскость P, что S лежит по одну сторону от P, а C лежит вне P; P' — плоскость, параллельная P и лежащая между P и C, S' — поверхность, получаемая из S заменой части S между P и P' на часть P', ограниченную линией пересечения P' и S. Доказывается, что электростатическая емкость поверхности S' не возрастает при движении P' от P к C. Поэтому при заданном контуре C поверхность с наименьшей емкостью, натянутая на C, лежит внутри наименьшего выпуклого тела, содержащего C. Утверждается, что все рассуждения переносятся на случай плоскости и логарифмического потенциала. *Х. Л. Смолицкий*

1756. Об оценке погрешности при решении задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. Коллац (Sulla maggiorazione dell'errore nel problema di Dirichlet per le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Collatz Lothar), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 68—71 (итал.)

Устанавливается оценка погрешности приближенного решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$L[u]\equiv-\sum_{j,k}^{n}a_{jk}\frac{\partial^2u}{\partial x_j\partial x_k}-\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=r,$$

$u=\tilde{u}$ на Γ. Здесь a_{jk}, b_j, c, r — непрерывные функции в области D (с границей Γ), $c\geqslant0$. Различаются два случая:

1) Приближенное решение v удовлетворяет точно уравнению $L[v]=r$; в этом случае погрешность $w=v-u$ в $D+\Gamma$ удовлетворяет неравенству $|w|\leqslant\max|\tilde{w}|$, где $\tilde{w}$ — значение погрешности на Γ.

2) Приближенное решение v удовлетворяет точно краевому условию $\tilde{v} = \tilde{u}$ на Γ (метод Ритца). В этом случае при $c = 0$ имеет место неравенство $v + q_1 - M_1 \leqslant u \leqslant v + q_2 - M_2$, где q_1 и q_2 — функции, удовлетворяющие условиям $L[v+q_1] \leqslant r \leqslant L[v+q_2]$, а $M_1 = \max_{\Gamma}(v + q_1 - u)$ и $M_2 = \min_{\Gamma}(v + q_2 - u)$; при $c \neq 0$ справедлива аналогичная оценка.

В случае общего краевого условия $A_1 u + A_2 \frac{\partial u}{\partial \sigma} = A_3$ на Γ ($A_1 > 0$, $A_2 \geqslant 0$, σ — конормаль), если приближенное решение удовлетворяет условиям $L[v] = 0$ в D и $A_1 v + A_2 \frac{\partial v}{\partial \sigma} = A_3'$ на Γ, погрешность оценивается неравенством $\varphi_{\min} \leqslant w \leqslant \varphi_{\max}$ в $D + \Gamma$, где $\varphi = \frac{A_3' - A_3}{A_1}$.

Наконец, если приближенное решение v удовлетворяет условиям: $|L[v] - r| \leqslant \delta$ в D и $|\tilde{v} - \tilde{u}| \leqslant \delta_1$ на Γ, то $|w| \leqslant \delta_1 + 2\delta B$, где B находится из условия $\left|\frac{z}{A}\right| \leqslant B$, $L[z] \leqslant -A < 0$.

Оценки ранее были даны в более общей форме О. А. Олейник (Матем. сб., 1952, **30(72)**, № 3, 695—702). *В. К. Саульев*

1757. Неравенства для некоторых собственных значений мембраны данной площади. Сегё (Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area. Szegö G.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 3, 343—356 (англ.)

Изучается задача:

$$\nabla^2 u + h^2 u = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0 \tag{2}$$

в области D с аналитической границей C. Пусть μ_2 — наименьшее положительное собственное значение задачи (1) — (2). В работе доказана следующая теорема:

Из всех областей D данной площади A максимум μ_2 достигается для круга, т. е. справедливо неравенство

$$\mu_2 \leqslant p\,(A/\pi)^{-1/2},$$

где $p = 1{,}8412\ldots$ — наименьший положительный корень функции Бесселя $J_1'(r)$.

Эта теорема была высказана как гипотеза Корнхаузером и Штекгольдом (Kornhauser E. T., Stakgold J., J. Math. and Phys., 1952, **31**, 45-54).

Б. М. Левитан

1758. Об эпициклоидальных функциях. Агостинелли (Sulle funzioni epicicloidali. Agostinelli Cataldo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 473—477 (итал.)

Дается обзор нескольких ранее опубликованных работ автора (из них наиболее обширную см. в Ann. mat. pura ed appl., 1952, **33**(4), 165—210), относящихся к исследованию решения уравнения

$$\Delta u(x, y) + \lambda^2 u(x, y) = 0 \tag{1}$$

в случае эпициклоидального контура. К уравнению (1) применяется преобразование

$$x = na\rho\cos\varphi + b\rho^n \cos n\varphi,$$

$$y = na\rho\sin\varphi + b\rho^n \sin n\varphi \quad (a > b \geqslant 0,\ n \geqslant 2)$$

и вводятся частные решения $E_k\left(\rho, \varphi, \lambda, \frac{b}{a}\right)$ и $E_k^*\left(\rho, \varphi, \lambda, \frac{b}{a}\right)$ полученного таким путем уравнения. Автором исследованы эти функции, а также собственные значения и собственные функции уравнения (1) при указанном контуре.

Эрдейи показал, что E_k и E_k^* просто выражаются через бесселевы функции (см. РЖМат, 1953, 1236). *Э. Я. Риекстыньш*

1759. О решении задачи Коши для системы уравнений теории упругости неоднородной упругой среды. Бабич В. М., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 6, 1125—1128

Автор распространяет методы Кирхгофа, Вольтерра, Адамара и Соболева, данные для решения задачи Коши для гиперболических уравнений, на системы уравнений теории упругости. Для этого в случае однородной среды берутся матрицы Грина, строчки которых суть решения системы, отвечающие сосредоточенным импульсам, направленным вдоль той или иной из координатных осей. При двух пространственных переменных элементами матрицы Грина будут функции, обращающиеся в бесконечность на характеристических коноидах продольных и поперечных волн, при трех же пространственных переменных элементами будут «обобщенные функции» типа δ-функции Дирака. Непосредственно при помощи этих матриц Грина автор выводит формулы Стокса. Затем для неоднородной среды вместо матриц Грина строятся матрицы H, элементы которых суть приближенные решения системы. При помощи них исследуемая задача сводится к системе интегральных уравнений типа Вольтерра, которая решается затем методом последовательных приближений.

В противоположность методу конечных разностей и функциональному методу рассматриваемые в данной работе методы имеют, вообще говоря, локальный характер.

Библиография, 6 названий. *О. А. Ладыженская*

1760. Асимптотическое решение линейных гиперболических уравнений. Клайн (Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations. Kline Morris), J. Rational. Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 3, 315—342 (англ.)

Рассматривается вопрос о поведении при $t \to \infty$ решения $u(x, t)$ гиперболического уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_1, \ldots, x_n)\, u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x)\, u_{x_k} + cu = f_{tt}, \tag{1}$$

заданного в полупространстве $x_n \equiv t > 0$ пространства t, $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, если функция источника $f(x, t)$ имеет вид $g(x)\, e^{-i\omega t}\, \eta(t)$, где $\eta(t) = 0$ для $t < 0$ и $\eta(t) = 1$ для $t > 0$, и если $u(x, t) = u_t(x, t) = 0$ для $t < 0$. Автор заранее предполагает, что исследуемое решение $u(x, t)$ и «pulse soluti

он» $U(x, t)$, являющееся решением уравнения (1) при $f_{tt} = g(x)\delta'(t)$ ($\delta(t)$ — функция Дирака) и удовлетворяющее условиям $U(x, t) = U_t(x, t) = 0$ при $t < 0$, обладают рядом свойств во всем полупространстве $t > 0$. В частности, предполагается, что $U(x, t)$ при $t \to \infty$ достаточно быстро стремится к некоторому пределу $U(x, \infty)$. Тогда

$$u(x, t) = U(x, t) - U(x, \infty) + e^{-i\omega t}\{U(x, \infty) - \\ - i\omega \int_0^t (U(x, s) - U(x, \infty))\, e^{i\omega s}\, ds\}.$$

Для $u(x)$, равной пределу при $t \to \infty$ выражения, стоящего в фигурной скобке, выводится при помощи интегрирования по частям разложение по степеням $1/\omega$

$$u(x) \sim g(x)/a_{nn}(x) + \sum_\alpha [U(x, \psi_\alpha(x))]\, e^{i\omega\psi_\alpha(x)} - \\ - \frac{1}{i\omega}\sum_\alpha [U_t(x, \psi_\alpha(x))]\, e^{i\omega\psi_\alpha(x)} + \dots, \qquad (2)$$

которое автор называет асимптотическим рядом для $u(x)$. Квадратная скобка $[U(x, \psi_\alpha(x))]$ в (2) дает величину скачка функции $U(x, t)$ в точке $(x, t = \psi_\alpha(x))$, причем $t = \psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, суть характеристические поверхности, на которых U или ее производные по t терпят разрывы (первого рода, по предположению). Таким образом, при больших t решение $u(x, t)$ ведет себя приблизительно как $u(x)e^{-i\omega t}$, причем сумма двух первых членов разложения (2) соответствует решению, даваемому «геометрической оптикой».

Далее показывается, что скачки $U(x, t)$ и ее производных по t на характеристических поверхностях $t = \psi_\alpha(x)$ удовлетворяют вдоль бихарактеристик, покрывающих эти поверхности, обыкновенным дифференциальным уравнениям, и что начальные значения для скачков могут быть вычислены, исходя из данных изучаемой задачи. Эти предложения выводятся из интегрального тождества

$$\int_G uL^*v\,dv - \int_G fv_{tt}\,dv = 0,$$

которому должны удовлетворять решения уравнения (1) при любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $v(x, t)$, равной нулю вместе со своими первыми производными при $t < 0$. *О. А. Ладыженская*

1761. Метод наложения систем плоских волн. Хейс (The method of superposition of planar wave systems. Hayes Wallace D.), J. Aeronaut. Sci., 1954, **21**, № 4, 282 (англ.)

В полуплоскости $y > 0$ ищется решение волнового уравнения

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0,$$

подчиненное условиям: $\varphi|_{z=0} = \varphi_z|_{z=0} = 0$, при $y = 0$ φ_y принимает заданное значение. Как утверждает автор, методом Риса было дано решение этой задачи (Clarkson M. H., Defense Research Lab. Report № DRL-332, Univ. of Texas, May 1, 1953):

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{\pi}\iint_\Gamma \frac{\varphi_y(x, 0, z)\,dx\,dz}{\sqrt{(z_0 - z)^2 - (x_0 - x)^2 - y_0^2}}, \qquad (1)$$

где Γ — часть плоскости $y = 0$, в которой $0 \leqslant z < z_0$ и подкоренное выражение положительно. Автор получает ту же формулу методом наложения плоских волн, полагая

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^\pi f(z - x\cos\theta - y\sin\theta, \theta)\,d\theta$$

и подставляя это в правую часть формулы (1).

Примечание референта. Формула (1) непосредственно вытекает из более общей формулы, относящейся к случаю произвольных начальных условий и полученной референтом в 1940 г. (Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, 1940, № 101). *С. Г. Михлин*

1762. Замечание по поводу волнового уравнения. Серрин (A note on the wave equation. Serrin J. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 307—308 (англ.)

Пусть P и Q — точки, расположенные таким образом, что противоположно ориентированные характеристические конусы уравнения

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = u_{tt}$$

с вершинами в P и Q пересекаясь, ограничивают конечную область пространства R. Естественным образом можно определить, что такое эллипсоид, вписанный в R.

Обозначим через $\mathscr{L}$ преобразование Лоренца, переводящее PQ в ось t, а через L — плоскость, определяемую пересечением характеристических конусов. Имеет место теорема: Пусть E_1 и E_2 — эллипсоиды, вписанные в R. Если сечения E_1 и E_2 плоскостью L переводятся $\mathscr{L}$ в конфокальные эллипсоиды, то среднее значение u по объему E_1 равно среднему значению по объему E_2.

При доказательстве используется общая теорема о среднем Асгейрсона (Asgeirsson L., Math. Ann., 1936, **113**, 321—346). *А. А. Девин*

1763. Начальные и граничные задачи для уравнений в частных производных смешанного типа на краях. Хельвиг (Anfangs-und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern. Hellwig Günter), Math. Z., 1953, 58, № 4, 337—357 (нем.)

Исследуется возможность решить посредством преобразования Лапласа

$$Lu = \int_0^\infty e^{-sy}u(x, y)\,dy = v(x, s) \qquad (1)$$

дифференциальное уравнение

$$Bu + k(x)(r_1u_{yy} + r_2u_y + r_3u) = k(x)f(x, y), \qquad (2)$$

где $Bu \equiv -(p(x)u_x)_x + q(x)u$, $\quad 0 \leqslant y < +\infty$,

$l \leqslant x \leqslant m$ (I) или $l < x < m$ (II), при начальных условиях

$$\lim_{y\to 0} u(x, y) = u_0(x), \quad \lim_{y\to 0} u_y(x, y) = u_1(x) \qquad (3)$$

и граничных условиях

$$\lim_{x\to l} u(x, y)\cos\delta + \lim_{x\to l} u_x(x, y)\sin\delta = 0,$$

$$\lim_{x\to m} u(x, y)\cos\vartheta + \lim_{x\to m} u_x(x, y)\sin\vartheta = 0,$$

$0 \leqslant \delta,\ \vartheta < \pi$. При этом функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $k(x)$ действительны и непрерывны, $p(x) > 0$, $k(x) > 0$, r_1, r_2, r_3 — постоянные, $r_1 > 0$.

Преобразование (1) формально переводит уравнение (2) при условии (3) в обыкновенное уравнение

$$Av \equiv [k(x)]^{-1}Bv = \lambda v + h + g, \qquad (4)$$

где

$$\lambda = -(r_1 s^2 + r_2 s + r_3),\ h(x) = (r_1 s + r_2)u_0(x) + r_1 u_1(x),$$
$$g(x, s) = Lf(x, y).$$

Вводится гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ комплекснозначных функций $v(x)$ с $\|v\|^2 = \int_l^m |v(x)|^2 dx < +\infty$. Ссылаясь на работу Реллиха (Rellich F., Math. Ann., 1950-1951, **122**, 343—368), автор утверждает, что всегда можно найти линейное многообразие $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}$, в котором A будет существенно самосопряженным, т. е. будет иметь спектральное разложение.

Преобразование (1) и теория уравнения (4) используются для доказательства двух теорем существования: для однородного уравнения (2) ($f \equiv 0$) и для неоднородного уравнения (2) при $u_0(x) \equiv u_1(x) \equiv 0$, — обеих на открытом промежутке (II). Существенное предположение при этом состоит в том, что оператор A полуограничен снизу и для него на обоих концах имеет место случай предельной точки (Weyl H., Math. Ann., 1909, **68**, 220—269). Кроме того, накладываются еще некоторые ограничения на A и $\{A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3)I\}^{-1}$.

Обе теоремы существования дополняются оценкой

$$\int_l^m |u(x, y)|^2 k(x)\, dx < +\infty,$$

равномерной в каждом конечном промежутке $0 \leqslant y \leqslant y_0 < +\infty$.

Что касается случая предельного круга для оператора A, например, на конце $x = l = 0$, то в работе лишь устанавливается связь этого случая с поведением характеристик уравнения (2) на краю $x = l = 0$ области $0 < x < m$, $0 < y < +\infty$ при $p(x)$, $k(x)$, аналитических в окрестности $x = 0$. Здесь автор существенно использует результаты и терминологию другой статьи Реллиха (Rellich F., Math Z., 1943—1944, **49**, 702—723) и обещает рассмотреть теоремы существования в дальнейшем.

М. К. Фаге

1764. Уравнения параболического типа, не допускающие никаких решений. Адамар (Équations du type parabolique dépourvues de solutions. Hadamard J.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 1, 3—12 (франц.)

Рассматриваются вопросы существования классических решений уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y), \qquad (2)$$

с непрерывными правыми частями.

В первой части автор воспроизводит в несколько видоизмененном виде результаты Г. Петрини и А. Винтнера (Wintner A., Amer. J. Math., 1950, **72**, № 4, 731—738) относительно уравнения (1), а именно, выводит необходимое и достаточное условие существования в данной точке вторых производных логарифмического потенциала

$$\varphi(x, y) = \iint_D f(X, Y) \lg 1/r\, dX dY \qquad (3)$$

и дает пример непрерывной $f(x, y)$, для которой логарифмический потенциал не имеет в данной точке конечных вторых производных. Отсюда получается вывод, что уравнение (1) может не иметь решения, обладающего всюду интегрируемыми вторыми производными. Автор указывает простой прием построения таких функций $f(x, y)$, для которых логарифмический потенциал (3) не имеет вторых производных в точках любого наперед заданного счетного множества.

Во второй части аналогично проводится исследование этих вопросов для уравнения (2). Для этой цели автор доказывает теорему: Для того чтобы функция

$$W(x, y) = \iint_{D_y} f(X, Y)\ \frac{1}{\sqrt{y - Y}} \exp\left(-\frac{(X - x)^2}{4(Y - y)}\right) dX\, dY$$

имела вторую производную $\partial^2 W / \partial x^2$ в точке (x, y), необходимо и достаточно существование $\lim_{h\to 0} \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2}$, где $\frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} = \iint_{D_{y-h^2}} f(X, Y)\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, dX dY$,

$$w = w(x, y; X, Y) = \frac{1}{\sqrt{y - Y}} \exp\left(-\frac{(X - x)^2}{4(Y - y)}\right),$$

а D_y обозначает расположенную ниже прямой $Y = y$ часть области D, в которой рассматривается уравнение.

Отметим, что заглавие не соответствует содержанию статьи, т. к. уравнение (1) может иметь обобщенные решения. *Б. В. Боярский*

1765. Обобщенное уравнение распространения тепла и соответствующая формула Пуассона. Камерон (The generalized heat flow equation and a corresponding Poisson formula. Cameron R. H.), Ann. Math., 1954, **59**, № 3, 434—462 (англ.)

В полосе R: $0 < t < t_0$, $-\infty < \xi < +\infty$ ищется интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} - a\, \frac{\partial G}{\partial t} + \theta(t, \xi) G = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющий условию

$$\lim_{t\to +0} G(t, \xi) = \sigma(\xi). \qquad (2)$$

Доказывается, что при некоторых требованиях, наложенных на данные задачи, ее решение существует и дается интегралом Винера (Wiener N., Acta Math., 1930, **55**, № 1, 117—258)

$$G(t,\ \xi)=\int\limits_C^w \exp\left\{\frac{t}{a}\int\limits_0^1 \theta\left(t(1-s),\ 2\sqrt{t/a}\,x(s)+\xi\right)ds\right\}\times$$
$$\times\,\sigma\left(2\sqrt{t/a}\,x(1)+\xi\right)d_w x, \qquad (3)$$

распространенным на множество C функций $x(s)$, непрерывных на отрезке $0\leqslant s\leqslant 1$ и равных нулю при $s=0$; это решение в некотором смысле единственно. Основные результаты статьи даны в следующих теоремах:

Теорема 3. Пусть $\theta(t,\ \xi)$ ограничена сверху в R и пусть производные θ_t и θ_ξ в R непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|\theta_t(t,\ \xi)|<B_1\exp(B_2|\xi|),$$
$$|\theta_\xi(t,\ \xi)|<B_1\exp(B_2|\xi|);\quad B_1,\ B_2=\text{const}. \qquad (4)$$

Пусть еще произведение $\sigma(\xi)\exp(-B_3\xi^2)$ суммируемо в промежутке $-\infty<\xi<\infty$ при любой постоянной $B_3>a/4t_0$. Тогда функция (3) удовлетворяет в R уравнению (1) и в точках непрерывности функции $\sigma(\xi)$ — краевому условию (2); если $\sigma(\xi)$ ограничена в каждом конечном интервале, то условие (2) выполняется для почти всех значений ξ. Если $\sigma(\xi)$ суммируема в промежутке $-\infty<\xi<\infty$, то условие (2) выполняется в смысле нормы L_1, и для всех t, $0<t<t_0$, выполняется дополнительное условие $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} G(t,\ \xi)=0$.

Теорема 4. Пусть $\theta(t,\ \xi)$ ограничена а θ_t и θ_ξ непрерывны и удовлетворяют неравенствам вида (4) в каждой полосе $-\infty<\xi<+\infty$, $0<t<t_0$, где t_0 конечно. Решение уравнений (1) и (2), удовлетворяющее в каждой такой полосе неравенству $|G(t,\ \xi)|<B_1\exp(B_2\xi^2)$, где B_1, $B_2=\text{const}$ и имеющие непрерывные в R первые производные, единственно. Если произведение $\sigma(\xi)\exp(-B_3\xi^2)$, где $B_3>a/4t_0$, ограничено и измеримо, то решение, если оно существует, имеет вид (3). Если указанное произведение ограничено и измеримо при некотором $B_3<a/4t_0$, то такое решение существует и дается формулой (3).

Доказанные в статье теоремы позволяют свести вычисление некоторых интегралов Винера к решению уравнений (1) и (2). *С. Г. Михлин*

1766. Об одном частном случае задачи теплопроводности для двух сред. Добрышман Е. М., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 2, 219—224

Рассматриваются уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1(x)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right]\quad(x\geqslant 0),$$
$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k_2(x)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right]\quad(x\leqslant 0). \qquad (1)$$

Ищется решение уравнений, удовлетворяющее начальному условию $T_1=0$ при $t=0$, граничному условию $T_1=T_2$ при $x\to 0$ и условию теплового баланса

$$-\lim_{x\to+0}\lambda_1(x)\ \frac{\partial T_1}{\partial x}+\lim_{x\to-0}\lambda_2(x)\frac{\partial T_2}{\partial x}+hT_1\Big|_{x=0}=W(t).$$

Автор предполагает затухание температурных отклонений при $|x|\to\infty$.

Предполагается также, что

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^{\frac{1}{2}n};\qquad u_i\equiv\int\limits_0^x\frac{dx}{k_i(x)}<\infty;$$
$$k_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(i)}u_i^n,\qquad \alpha_0^{(i)}\neq 0\qquad(i=1,\ 2).$$

Вводятся новые независимые переменные:

$$\tau=\frac{2h\sqrt{t}}{\lambda_0^{(1)}}\sqrt{\alpha_0^{(1)}},\quad \zeta=\frac{\sqrt{\alpha_0^{(1)}}}{2\sqrt{t}}\int\limits_0^x\frac{dx}{k_1(x)},$$

$$\xi=\frac{\sqrt{\alpha_0^{(2)}}}{2\sqrt{t}}\int\limits_0^x\frac{dx}{k_2(x)},\quad\left(\lambda_0^{(1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\lambda_1(2y\sqrt{t})}{k_1(2y\sqrt{t})}\right)$$

после чего решение преобразованных уравнений ищется в виде рядов

$$T_1(\tau,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{1n}(\zeta)\,\tau^n,\quad T_2(\tau,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{2n}(\xi)\,\tau^n. \qquad (2)$$

Указывается способ последовательного построения функций

$$T_{11}(\zeta),\ T_{12}(\zeta),\ \ldots;\quad T_{21}(\xi),\ T_{22}(\xi),\ \ldots$$

Автор не доказывает сходимость рядов (2), хотя эта сходимость не представляется очевидной даже для малых значений τ. *Е. И. Ким*

1767. Об асимптотической устойчивости решений параболических дифференциальных уравнений. Нарасимхан (On the asymptotic stability of solutions of parabolic differential equations. Narasimhan R.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 3, 303—313 (англ.)

Автор доказывает устойчивость при $t\to\infty$ решений первой краевой задачи для некоторых классов нелинейных параболических уравнений, продолжая тем самым работы Белмана (Bellman B., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 21—44) и Проди (Prodi G., Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1951, **10**, 365—370). Именно, для уравнений

$$u_t=L[u]+F(x,\ t,\ u), \qquad (1)$$

где $L[u]$ есть эллиптический оператор вида

$$L[u]\equiv\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

доказывается следующая теорема:

Пусть u есть решение уравнения (1) в рассматриваемой ограниченной области G, имеющее в $\bar{G}$ при $t\geqslant 0$ непрерывные производные, входящие в (1), и равное нулю на границе Γ области G при $t\geqslant 0$. Пусть, кроме того, $F(x,\ t,\ 0)=0$ и существует число $K>0$ такое, что для $|u|<K$ верно неравенство

$$uF(x,\ t,\ u)\leqslant\lambda u^2,$$

где λ есть некоторая положительная постоянная, зависящая только от коэффициентов a_{ij} и b_i и области G. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что, если $|u(x,\ 0)|<\delta$ для $x\in G$, то $|u(x,\ t)|\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно по $x\in G$.

Из этой теоремы выводится аналогичное утверждение для

$$u_t = L[u] + F(x,\ t,\ u,\ u_{x_i})$$

при некоторых ограничениях относительно F и для систем уравнений с одинаковыми главными частями вида $u_{\nu_t} - L[u_\nu]$.

Доказательства этих утверждений в своей основной части базируются на принципе максимума для решений линейных параболических уравнений.

Библиография, 6 названий. *О. А. Ладыженская*

1768. Исправление к статье: «Линейные параболические уравнения произвольного порядка; общая краевая задача для эллиптического уравнения». Браудер (Errata: Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary-value problems for elliptic equations. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 12 (англ.)

Исправляются некоторые определения и уточняется формулировка теоремы 2 в названной статье (РЖМат, 1953, 751). *Н. Д. Введенская*

1769. Линейные уравнения в частных производных смешанного типа. Хак, Хельвиг (Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus. Haack Wolfgang, Hellwig Günter), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 60—76 (нем.)

Решается задача Коши в гиперболической области с начальными данными на параболической линии. Решение не является существенно более общим, чем решение референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, 8, 195—224), но выполнено иным методом. Референт пользовался функцией Римана, вследствие чего он получает решение в явном виде. Авторы сводят решение к некоторому интегральному уравнению типа Вольтерра, которое они решают последовательными приближениями. Предварительный переход к характеристическим координатам при этом не требуется, однако решение не получается в явном виде. *Ф. И. Франкль*

1770. Проблема двух нехарактеристик с данными частично на параболической линии. Проттер (The two noncharacteristic problem with data partly on the parabolic line. Protter M. H.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 1, 99—108 (англ.)

Рассматривается уравнение типа Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0. \qquad (1)$$

Краевые данные задаются на параболической линии и на одной нехарактеристической дуге в нижней полуплоскости. Функция $K(y)$ заменяется сначала ступенчатой функцией, так что уравнение (1) распадается на несколько уравнений Даламбера. В этой приближенной постановке задача решается в явном виде и делаются необходимые оценки; затем совершается предельный переход. Доказательство оценок приведено не полностью и требует подробной проверки.

Интегральное преобразование, при помощи которого автор пытается доказывать единственность решения, заведомо неправильно (в преобразованном выражении складываются члены разных размерностей). *Ф. И. Франкль*

1771. Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, сводящиеся к линейным. Баландер С. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 5, 19—34

Рассматривается вопрос о сведении нелинейного уравнения

$$\Phi\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (1)$$

к линейному уравнению

$$a(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} + f(x,y)v + g(x,y) = 0 \qquad (2)$$

преобразованием искомой функции

$$v(x,y) = N[x,\ y,\ u(x,y)]. \qquad (3)$$

Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования функции $N(x,\ y,\ u)$ для случаев, когда уравнение (1) гиперболического, эллиптического, параболического и смешанного типов.

Пусть (1) — гиперболическое уравнение. Для того чтобы оно интегрировалось по (3), где $N(x,\ y,\ u)$ — фиксированная функция, а $v(x,\ y)$ — произвольное решение заданного линейного уравнения (2), необходимо и достаточно соблюдение условий:

I. Уравнение (1) разрешимо относительно линейной комбинации вторых производных и после разрешения имеет вид:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + E'\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + F'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + G'\frac{\partial u}{\partial x} + H'\frac{\partial u}{\partial y} + K' = 0, \qquad (4)$$

где $D',\ E',\ \ldots,\ K'$ — функции $x,\ y$ и u.

II. После преобразования к каноническим переменным уравнение (4) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + A\frac{\partial u}{\partial\xi} + B\frac{\partial u}{\partial\eta} + C\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} + D = 0, \qquad (5)$$

где A, B, C и D — функции ξ, η и u.

III. Коэффициенты уравнения (5) и коэффициенты уравнения $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta} + \alpha\frac{\partial v}{\partial\xi} + \beta\frac{\partial v}{\partial\eta} + \gamma v = 0$, полученного из (2) преобразованием к тем же каноническим переменным, удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(A-\alpha) + AB - \alpha\beta + \gamma = \frac{\partial D}{\partial u} + DC,$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(B-\beta) + AB - \alpha\beta + \gamma = \frac{\partial D}{\partial u} + DC,$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial\xi}.$$

Аналогичные теоремы доказываются для всех упомянутых выше типов уравнений. *З. И. Халилов*

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

1772. Вывод дифференциального уравнения движения поезда. Галеев А. У., Тр. Моск. электромехан. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1953, № 62, 294—297

Рассматривается движение поезда по прямолинейным и горизонтальным рельсам, проложенным на жестком основании. Из систем уравнений движения ведущих и ведомых колесных пар локомотива (записанных в предположении отсутствия скольжения и виляния колес), уравнения движения корпуса локомотива и аналогичных систем уравнений для вагонов выведено уравнение поступательного движения поезда в целом:

$$[M + \Sigma (I \mid R^2)] \frac{dv}{dt} = \Sigma (M_{вр}/R_1) - W,$$

где M — масса всего поезда, I — моменты инерции колесных пар, R — радиусы колес по кругу катания, R_1 — соответствующие радиусы ведущих колес локомотива, $M_{вр}$ — вращающий момент относительно оси ведущего колеса, $\Sigma (M_{вр}/R_1) = F_k$ — касательная сила тяги локомотива, W — полное сопротивление, включающее в себя сопротивление из-за трения в шейках осей, сопротивление, вследствие качения колес, сопротивление воздуха.

Из систем уравнений движения ведущих колес найдено выражение для касательной силы тяги локомотива, которое показывает, что эта сила не равняется сумме горизонтальных реакций его ведущих колес.

Имеются опечатки, затрудняющие чтение статьи. *В. Б. Гласко*

1773. Новые интегральные уравнения теорий упругости анизотропных тел. Купрадзе В. Д., Башелейшвили М. О., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 6, 327—334

Строятся четыре матрицы, столбцы которых удовлетворяют системе уравнений в смещениях для обобщенного плоско-напряженного состояния анизотропной среды:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + G) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (A_{12} + G) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \qquad (1)$$

$$A_{11} > 0, \quad A_{22} > 0, \quad G > 0, \quad A_{11} A_{22} - A_{12}^2 > 0.$$

Эти матрицы названы фундаментальными решениями уравнений (1). Одно из фундаментальных решений ограничено, другие обладают логарифмической или полярной особенностью. Авторы предполагают воспользоваться фундаментальными решениями для сведения своей задачи к интегральным уравнениям типа Фредгольма. *С. Г. Михлин*

1774. Контактная задача теории упругости. Эйдус Д. М., Матем. сб., 1954, 34, № 3, 429—440

Ставится задача о равновесии упругого тела, заполняющего конечную область Ω, под действием заданной объемной силы $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$ при условии, что на части Γ_1 границы области Ω обращаются в нуль нормальная составляющая смещений и касательная составляющая напряжений, а на остальной части Γ_2 той же границы обращается в нуль вектор напряжений. Математически задача состоит в интегрировании уравнения

$$\mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mathbf{f} = 0$$

при условиях (смысл обозначений очевиден)

$$\mathbf{un}|_{\Gamma_1} = 0, \qquad (1)$$
$$\mathbf{t}_\tau|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{t}|_{\Gamma_2} = 0. \qquad (2)$$

Задача сводится к отысканию минимума потенциальной энергии при условии (1) — условия (2) для этой задачи естественны. Существование решения доказывается, если для функций, удовлетворяющих условию (1), справедливы неравенства

$$\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\Omega < \alpha \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega,$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega < \beta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]^2 d\Omega$$

($\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — постоянные).

Автор доказывает эти неравенства в том случае, когда Γ_1 отлична от куска сферы или винтовой поверхности (в частности, от куска цилиндра или плоскости). В этих исключительных случаях упомянутые неравенства оказываются верными, если смещение $\mathbf{u}$ подчинить некоторым дополнительным условиям. Так, если Γ_1 есть часть сферы, то достаточно потребовать, чтобы

$$\int_\Omega \mathbf{u} \times \mathbf{r}\, d\Omega = 0$$

($\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор переменной точки в Ω). Решение поставленной краевой задачи существует в этом случае тогда и только тогда, когда

$$\int_\Omega \mathbf{f} \times \mathbf{r}\, d\Omega = 0.$$

Аналогичные результаты имеют место и в других исключительных случаях. *С. Г. Михлин*

1775. Собственные функции реальных резонаторов. Вахнин В. М., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 4, 779—782

Рассмотрена система телеграфных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -G_0 u - C_0 \frac{\partial u}{\partial t},$$

где L_0, C_0 — всюду постоянны, а $G_0 = 0$ при $|x| < l$ (в отрезке a) и $G_0 = \text{const} > 0$ при $|x| > l$ (в отрезке c). Граничные условия:

$$u_a(\pm l) = u_c(\pm l), \quad i_a(\pm l) = i_c(\pm l), \qquad (1)$$

на отрезках c решение должно удовлетворять также условию ограниченности на бесконечности.

Ищутся частные решения вида

$$u_\nu = \dot{V}_\nu(x)\, e^{-\Omega_\nu t}, \quad i_\nu = J_\nu(x)\, e^{-\Omega_\nu t},$$

где $\Omega_\nu = \alpha_\nu + j\omega_\nu$ — комплексная собственная частота. Тогда комплексная функция $\dot{V}_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению несамосопряженного типа

$$\frac{d^2 \dot{V}_\nu}{dx^2} + (L_0 G_0 \Omega_\nu - L_0 C_0 \Omega_\nu^2) \dot{V}_\nu = 0 \qquad (2)$$
$$(G_0 = 0, \quad |x| < l; \quad G_0 > 0, \ |x| > l).$$

Решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям (1), разделяются на два типа: функции I типа

неограниченно убывают по амплитуде в бесконечности и имеют дискретный спектр собственных частот, функции II типа ограничены по амплитуде в бесконечности и имеют непрерывный спектр собственных частот.

Решения, симметричные по напряжению относительно точки $x = 0$, имеют вид

$$\hat{V}_v = \mathrm{ch}\,(\Gamma_a x), \text{ где } \Gamma_a = \Omega\sqrt{L_0 C_0}, \text{ в отрезке } a, \quad (3)$$

$$\hat{V}_v = \mathrm{ch}\,(\Gamma_a l)\, e^{\pm\Gamma_c (x \mp l)} \text{ в отрезке } c, \quad (4)$$

где $$\Gamma_c = \varkappa_c + j\gamma_c = \sqrt{L_0 C_0 \Omega^2 - L_0 G_0 \Omega}\,. \quad (5)$$

Если $\varkappa_c \neq 0$, то ввиду условия ограниченности решения на бесконечности следует брать значение корня (5), которому соответствует $\varkappa_c < 0$. Ввиду условий (1) собственные частоты находятся из трансцендентного уравнения

$$\mathrm{th}\,(\Gamma_a l) = \Gamma_c/\Gamma_a. \quad (6)$$

Так получаются функции I типа.

Если $\varkappa_c = 0$, то условию ограниченности решения на бесконечности удовлетворяют оба значения корня (5). Случай $\varkappa_c = 0$ имеет место при $0 \leqslant \alpha < G_0/C_0$, $\omega = 0$ (апериодические процессы) и при $\alpha = G_0/2C_0$, $0 < \omega < \infty$ (колебательные процессы с одинаковым затуханием). Линейной комбинацией двух функций (4) с противоположными знаками корня (5) можно удовлетворить условиям (1) при непрерывном изменении $\Omega = \alpha + j\omega$. Так получаются функции II типа.

Рассмотрены решения, получаемые из (3) и (4) заменой ch на sh. Уравнение (6) заменяется на $\mathrm{cth}\,(\Gamma_a l) = \Gamma_c/\Gamma_a$.

Намечено разложение произвольного колебания в ряд по собственным функциям I типа. Автор полагает, что поправочный член этого ряда разлагается по собственным функциям II типа в форме интеграла Фурье.

В работе имеются ошибки. Например, излишним является ограничение, что следует использовать лишь решения уравнения (6), для которых $\alpha_v < G_0/2C_0$. *Н. А. Бразма*

1776. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Седов Л. И., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 5, 735

Для общеизвестных нелинейных уравнений одномерного движения газа выписано в замкнутом виде точное решение, содержащее одну произвольную функцию. Автор не указывает метода отыскания полученного решения. *Д. М. Волков*

1777. Медленное неустановившееся обтекание кругового цилиндра вязкой жидкостью. Русанов Б. В., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 6, 983—986

Задача сводится к решению системы

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,p + \Delta\mathbf{w}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0$$

при начальном условии $\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0(r, \theta)$ и граничном условии $\mathbf{w}|_{r=1} = 0$. На бесконечности составляющие вектора скорости $\mathbf{w}_0(r, \theta)$ удовлетворяют соотношениям

$$v_0(r, \theta) = w_\infty \cos\theta + o(1),$$

$$u_0(r, \theta) = -\,w_0 \sin\theta + o(1).$$

Начальное распределение скорости предполагается симметричным относительно плоскости, проходящей через ось цилиндра.

Решение задачи дано для радиальной и угловой составляющих скорости $\mathbf{w}$, а также для давления p в форме:

$$v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t)\cos n\theta,$$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r; t)\sin n\theta,$$

$$p(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(t)}{r^n}\cos n\theta + a_0(t).$$

Функции $f_n(r, \theta, t)$, $g_n(r, \theta, t)$, $a_n(t)$ найдены из граничных условий. Доказаны единственность и сходимость решения. Найдены оценки для величин $|v(r, \theta, t)|$ и $|u(r, \theta, t)|$, при помощи которых дано объяснение невозможности установившегося режима для медленного обтекания цилиндра вязкой жидкостью (парадокс Стокса). Указана возможность применения рассмотренного метода в случае несимметричного распределения скорости в начальный момент и в случае задачи о медленном движении цилиндра в вязкой жидкости по заданному закону. *В. П. Пилатовский*

1778. Нижние границы для электростатической емкости куба. Мак-Махон (Lower bounds for the electrostatic capacity of a cube. Mc Mahon James), Proc. Roy. Irish Acad., 1953, **A55**, № 9, 133—137 (англ.)

Пусть V — область трехмерного пространства, внешняя к замкнутой поверхности B, $u(x, y, z)$ — гармоническая в V функция и $u|_B = 1$. Тогда $C = \int_V (\mathrm{grad}\ u)^2\, dV/4\pi$ есть электростатическая емкость B.

Если $\mathbf{P}''$ — векторное поле в V, кусочно-непрерывно дифференцируемое и обладающее свойствами: а) $\mathrm{div}\,\mathbf{P}'' = 0$ в точках непрерывности $\mathbf{P}$, б) $\mathbf{Pn}$ непрерывно при переходе через поверхность разрыва ($\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности разрыва), в) $|\mathbf{P}''| = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ при $r \to \infty$ (r — расстояние точки до начала координат), то из неравенства $0 \leqslant \int_V (\mathrm{grad}\ u - \mathbf{P}'')^2\, dV$ следует, что $4\pi C \geqslant 2\int_B \mathbf{Pn}\, dB - \int_V (\mathbf{P}'')^2\, dV$.

Пусть $\mathbf{P}''_s$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ — векторные поля со свойствами а), б), в), a_s — постоянные, $\mathbf{P} = \sum_1^n a_s \mathbf{P}''_s$. Тогда

$$4\pi C \geqslant \sum_0^n a_s \int \mathbf{P}''_s \mathbf{n}\, dB, \quad (1)$$

если a_s выбраны из условий

$$e_t \equiv \sum_0^n a_s \int_V \mathbf{P}''_t \mathbf{P}''_s dV - \int_B \mathbf{P}_t \mathbf{n}\, dB = 0 \quad (t = 0, 1, \ldots, n).$$

Правая часть (1) называется ненадежной нижней гранью для C (так как при численном решении системы $e_t = 0$ неизбежны погрешности). Надежной гранью названа разность между ненадежной гранью и $\sum a_t e_t$.

Пусть B — поверхность куба с ребром 1, начало координат в центре куба, $\mathbf{P}_0'' = \operatorname{grad}\frac{1}{r}$, $\mathbf{P}_t''$ ($t = 1, 2, \ldots, n$) — пирамидальные векторные поля второго класса, определяемые ниже. Трехмерное пространство заполняется тетраэдрами, каждые два из которых либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо ребро, либо грань; t, s, ... — вершины тетраэдров. Совокупность всех тетраэдров, имеющих общую вершину, называется ячейкой, общая вершина — центр ячейки. Непрерывная функция P_s', равная 1 в вершине s, нулю вне и на границе ячейки с центром в s и линейная в каждом тетраэдре ячейки, названа пирамидальной. Ее градиент $\nabla P_s'$ кусочно-постоянен. Векторным полем первого класса называется $\mathbf{P}_{ts}' = P_t' \nabla P_s'$, векторным полем второго класса — $\mathbf{P}_{ts}'' = \nabla P_t' \times \nabla P_s'$. Совокупность тетраэдров, имеющих общее ребро ts, — семейство с сердечником ts. Очевидно $\mathbf{P}_{ts}''$ равно нулю, если t и s не являются различными концами одного ребра, и равно нулю вне семейства с сердечником ts. Устанавливается: а) $\mathbf{P}_{ts}''$ (кусочно-постоянное) в каждом тетраэдре семейства с сердечником ts имеет направление ребра, противолежащего сердечнику, б) проекции $\mathbf{P}_{ts}''$ на нормаль к общей грани двух тетраэдров семейства равны между собой, в) $\mathbf{P}_{ts}'' = \operatorname{rot} \mathbf{P}_{ts}'$. Из а) и б) следует, что поток вектора $\mathbf{P}_{ts}''$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Линейной комбинацией $\mathbf{P}'' = \sum_t \sum_s b_{ts} \mathbf{P}_{ts}''$ ($b_{ts} = -b_{ts}$, $b_{st} = 0$ для сердечников с вершинами, далекими от начала координат) аппроксимируется rot $\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — достаточно гладкое векторное поле, $\mathbf{v} \to 0$ при $r \to \infty$.

Все пространство разбито на кубы с ребром 1, одним из кубов является исследуемый. Каждый куб вне исследуемого разбивается на m^3 малых кубов; вершины, центры, центры граней малых кубов являются вершинами тетраэдров, заполняющих область V; n — число коэффициентов b_{ts}, не предположенных заранее равными нулю.

Вычислены значения надежной нижней грани: $m = 1$, $n = 0$, $C > 0{,}60154744$; $m = 2$, $n = 6 \times 48$, $C > 0{,}62838420$; $m = 4$, $n = 38 \times 48$, $C > 0{,}639273$.

Эти оценки менее точны по сравнению с приведенными Дабони: $0{,}654 < C < 0{,}676$ (Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 4, 461—466).

Автор считает главной целью статьи — дать пример применения пирамидальных векторных полей второго класса для решения трехмерных граничных задач; задача вычисления емкости куба выбрана лишь потому, что ей уделено внимание в современной литературе. Можно было также решать задачу о верхней грани.

Пирамидальные функции на плоскости были введены Сингом (Synge J. L., Rend. mat. e appl., 1951, **10**, 24—44), на работу которого ссылается автор. *Х. Л. Смолицкий*

1779. Близкие к эллипсоиду фигуры равновесия однородной жидкости, притягиваемой по закону Ньютона к нескольким удаленным телам. А г о с т и н е л л и (Figure di equilibrio prossime allellissoide di una massa liquida omogenea attratta da piu corpi lontani con la legge di Newton. A g o s t i n e l l i C a t a l d o), Rend. Circolo mat. Palermo, 1952, **1**, сер. 2, 281—322 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Исследуется важный для космогонии вопрос о формах равновесия однородной жидкости, близких к эллипсоидальным, при наличии достаточно удаленных центров притяжения (точечных масс), лежащих в экваториальной плоскости, при условии вращения жидкости вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Эллипсоидальные формы равновесия в этом случае рассматривались автором (Mem. Reale Accad. sci. Torino, 1943/1944, **71**, сер. 2а, № 1), который обобщил результаты Роша (E. Roche, см., например, Lichtenstein L., Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin, 1933, 144), относящиеся к одному удаленному притягивающему центру. В настоящей статье применяется аппарат теории функций Ляме и выводится новая форма необходимого условия равновесия жидкого эллипсоида относительно системы координат, вращающейся вместе с ним:

$$\frac{R_6 S_6}{5} - \frac{R_3 S_3}{3} - \frac{2\pi}{3T}\left(\alpha R_3^2 + \beta \frac{R_6^2}{b^2 - a^2}\right) = 0.$$

Кроме того, добавляются условия критичности эллипсоида

$$\frac{R_k S_k}{2n+1} - \frac{R_3 S_3}{3} - \frac{2\pi}{3T}\alpha R_3^2 = 0,$$

вытекающие из разложения деформации ζ в ряд по произведениям функций Ляме. Здесь $R = R(\rho)$ и $S = S(\rho)$ — функции Ляме соответственно первого и второго рода,

$$R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2}, \quad R_6 = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}, \; a < b < c$$

(ρ — значение наибольшей эллиптической координаты соответствующее данному эллипсоиду), R_k — любая из $2n+1$ функций Ляме порядка n,

$$T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3 = \frac{4}{3}\pi \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

— объем данного эллипсоида, а α и β — постоянные, зависящие от масс и расположения притягивающих центров. Подробно рассматриваются критические эллипсоиды для $n = 2$ и $n = 3$. Для $n = 2$, например, они существуют только для $R_k = \rho^2 - \delta_1$ или $\rho^2 - \delta_2$, где δ_1 и δ_2 — корни характеристического уравнения

$$6\delta^2 - 12g\delta + 6g^2 - \frac{1}{2}g_2 = 0,$$

$$g = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \; g_2 = 4(3g^2 - [a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2]),$$

$$a^2 < \delta_1 < b^2 < \delta_2 < c^2,$$

причем в первом случае они являются обобщениями критических эллипсоидов Якоби, а во втором — Маклорена (которые получаются при $\alpha = \beta = 0$). В за-

ключение рассматриваются для любого n критические эллипсоиды, близкие к эллипсоидам вращения.

В. И. Левин

1780. О наличии ударов в потоках смешанного сверхзвукового и дозвукового типа. Гьюдерли (On the presence of shocks in mixed subsonic-supersonic flow patterns. Guderley Gottfried), Advances Appl. Mech., 1953, **3**, 145—184 (англ.)

Изложение исследований автора и А. Буземанна (Busemann) относительно спорного вопроса: существуют ли вообще непрерывные истечения со сверхзвуковыми скоростями.

Статья содержит две части — математическую и физическую.

В математической части автор при помощи простого анализа изменения давления вдоль характеристики вблизи линии звуковой скорости показывает, что ограниченная сверхзвуковая область при обтекании некоторого профиля не может распространиться вдоль профиля в направлении течения, и что контур, ограничивающий этот профиль, не может содержать ни одного прямолинейного отрезка, как бы мал он ни был. Но это представляет лишь частный ответ: необходим более тонкий анализ; последний основывается на изучении граничных задач для некоторых уравнений с частными производными смешанного типа и, в частности, на невозможности найти решение такого уравнения в смешанной области, если заранее заданы условия вдоль замкнутого контура, ограничивающего эту область. Поскольку математическое исследование этих задач в настоящее время мало развито, автор принужден пользоваться аналогиями и частными случаями. Если исходить из потенциального течения со сверхзвуковой скоростью, а затем слегка деформировать контур профиля на физической плоскости, то новую задачу можно линеаризовать; в плоскости годографа мы приходим к следующей задаче: найти решение линейного уравнения, которое вдоль замкнутого контура удовлетворяет достаточно простому условию: задаются производные в данном направлении. Достаточно показать, что эта задача не допускает решения, если ограниченная таким образом область содержит гиперболическую часть.

Для упрощения автор производит расчеты, предполагая справедливым уравнение Трикоми, иными словами, применимость в изучаемом случае законов сверхзвукового подобия, и, изучая частные случаи, показывает, что решения не существует; эти случаи получаются при рассмотрении задачи для криволинейных треугольников частного вида, для которых собственными функциями задачи являются простые решения, полученные разделением переменных (частные решения Дарбу). Если задача допускает единственное и ограниченное решение для эллиптического контура, то она не допускает никакого ограниченного решения, если область является смешанной. Кроме того, последовательность собственных значений обладает весьма различными свойствами в зависимости от того, будет ли область полностью эллиптической, полностью гиперболической или смешанной. Конечно, как это признает автор, его рассуждения не имеют безупречной математической строгости, ибо: а) используется приближение Трикоми, б) невозможность рассматриваемой математической задачи доказана только для очень частных контуров; но тем не менее для доказательства несуществования решения достаточно дать пример.

Вторая часть содержит более интуитивные соображения, которые приводят к аналогичным заключениям.

P. Germain

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 11, 1140.

1781. Второе приближение для трехразмерных крыльев в сверхзвуковом потоке. Кларксон (A second-order theory for three-dimensional wings in supersonic flow. Clarkson M. H.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, ч. 2, 203—221 (англ.)

Рассматривается пространственная задача обтекания крыла установившимся, безвихревым, сверхзвуковым потоком невязкого газа. Ось Ox направлена по потоку, ось Oz — вертикально вверх, передняя кромка крыла совпадает с осью Oy. Верхняя и нижняя поверхности крыла задаются уравнениями

$$\overline{z} = \varepsilon_u S_u(x, y)\, H(x),$$

$$\underline{z} = \varepsilon_l S_l(x, y)\, H(x),$$

где S_u и S_l — аналитические функции x и y при $x \geqslant 0$, $S_u(0, y) = S_l(0, y) = 0$; $\dfrac{\partial S_u}{\partial x}(0, y) = \dfrac{\partial S_l}{\partial x}(0, y) = 1$, а $H(x)$ — единичная функция Хевисайда. Потенциал возмущений потока ищется в виде ряда по степеням малого параметра ε (ε_u или ε_l). Задача определения второго члена этого ряда приводится к нахождению в полуплоскости $z > 0$ решения неоднородного волнового уравнения

$$\varphi_{uu} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = f(u, y, z),$$

удовлетворяющего условиям: $\varphi_z|_{z=0} = g(u, y)$ при $u > 0$; $\varphi(u, y, z) = 0$ при $u \leqslant 0$; $\varphi(u, y, z)$ непрерывно при $z \geqslant 0$.

Решение этой задачи находится в явном виде способом Рисса (Riesz M., Acta math., 1949, **81**, 1—223). Устанавливается единственность решения. Полученный результат применяется для вычисления (с точностью до ε^2) распределения давления на поверхности крыла в случаях: а) плоского обтекания клина, б) обтекания плоского и слабоизогнутого по дуге параболы крыла трапецевидной формы в плане, равномерно вращающегося вокруг оси Ox. Метод расчета может быть применен и к некоторым другим случаям обтекания крыльев сверхзвуковым потоком.

И. Л. Кароль

1782. Общая теория скоса потока за крылом конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Кшивоблоцкий (On the general theory of downwash behind a finite wing in supersonic range. Krzywoblocki M. Z. V.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, **45**, № 1, 21—40 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 5544.

1783. Распределение скоростей и температуры в потоке жидкости над бесконечной плоскостью: теория пограничного слоя. Рай (Velocity and temperature distributions in a liquid flowing over an infinite plate: boundary layer theory. Ray M.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1952, **44**, № 3, 137—141 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Решается задача о пограничном слое в потоке несжимаемой жидкости, движущейся над плоскостью $y=0$. Для основного потока принимается, что давление $p=\text{const}$, компоненты скорости

$$V_x = u = \text{const} = U, \quad V_y = v = 0.$$

Уравнения пограничного слоя записываются в виде (Мизес и Фридрихс)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Уравнение для функции теплосодержания i берется в форме (Юнг)

$$\rho\left(\frac{\partial i}{\partial t} + u\frac{\partial i}{\partial x} + v\frac{di}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial i}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (2)$$

где ρ — плотность жидкости, μ — вязкость, $\sigma = \mu c_p / k$ — число Прандтля, k — коэффициент теплопроводности, c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Если считать, что все величины не зависят от x и $v \equiv 0$, то система уравнений (1) и (2) приводится к виду

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (3)$$

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial i}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \qquad (4)$$

Ищется решение при граничных условиях:

$$i = I_0, \ \frac{\partial i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = 0;$$

$$i = I, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \infty, \ u = U.$$

В случае $\mu = \text{const}$, $\sigma = 1$ решение уравнения (3) записывается в явной форме:

$$u = U\,\text{erf}(\eta) = U\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta,$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{t}}\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

Решение (4) ищется затем в виде $i = i(u)$.

В общем случае предполагается, что $i = i(u)$ и

$$\tau \equiv \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \tau(u).$$

Автор приходит к выводу, что решение нестационарной задачи для несжимаемой жидкости подобно решению стационарной задачи для сжимаемого потока жидкости или газа. *Ю. Н. Днестровский*

1784. Об акустическом сопротивлении движущегося плоского излучателя. Четаев Д. Н., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 3, 355—358

Используется известное выражение для потенциала скорости φ установившихся колебаний жидкости, движущейся с постоянной скоростью V, меньшей скорости звука u, в полупространстве вдоль плоской жесткой стенки ($z=0$); в этой стенке имеется отверстие S заданной формы, в котором колеблется излучатель (поршень) по закону $z = ve^{i\omega t}$ ($v = \text{const}$).

Акустическое сопротивление (полный импеданс) пластины

$$Z = \frac{i\omega\rho}{v}\iint_S \varphi\,dS \qquad (\rho \text{ — плотность среды})$$

после подстановки выражения φ в общем случае дано в форме

$$Z = u\rho S\left[1 - (1-\beta^2)\frac{a^2}{2\pi S}\int_{S_1'}\int\int_0^{2\pi} A\,d\theta\,dS_1'\right],$$

где $A = \dfrac{\exp\left[-ika\left(1+\beta\sin\theta\right)r_1(\theta)/\sqrt{1-\beta^2}\right]}{1+\beta\sin\theta}$,

$k = \omega/u$, $\beta = V/u$, S_1' — область, подобная S, a — некоторый линейный размер области S, $r_1(\theta)$ — полярный радиус точки контура S_1'.

Общее выражение для акустического сопротивления колеблющейся пластины подробно рассмотрено для случая прямоугольной области. Выражения для активной R и реактивной X части сопротивления $Z = u\rho S(R + iX)$ прямоугольного излучателя содержат известные специальные функции ($\text{Si}\,x$, $\text{Ci}\,x$) и их интегралы, а также некоторые легко табулируемые функции. Приведены результаты численных расчетов акустического сопротивления квадратного излучателя.

При $\beta = 0$ получаются известные выражения, найденные ранее автором, для составляющих акустического сопротивления прямоугольной пластины в неподвижную среду (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 6, 813—816; Прикл. матем. и механика, 1951, 15, № 4, 437—444). *В. П. Пилатовский*

1785. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Акатнов Н. И., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1953, № 5, 24—31

Решается задача о распространении плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой границы. Предполагается, что жидкость поступает через бесконечно тонкую щель в пространство, заполненное той же жидкостью и ограниченное твердой стенкой. Предположение о характере источника позволяет считать струю пограничным слоем при условии, что скорость внешнего потока U равна нулю. В силу основного допущения, $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$, и результата, следующего из интеграла Бернулли для течения во внешнем потоке: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ ($U = 0$), автор для решения поставленной задачи пользуется уравнениями плоскопараллельного установившегося движения вязкой жидкости в пограничном слое:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

при граничных условиях:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad u = 0 \quad \text{при} \quad y = \infty.$$

Выводится интегральное соотношение

$$E=\int_0^\infty u^2\left(\int_0^y u\,dS\right)dy=\text{const}\quad\text{(относительно } x\text{)}\ (1),$$

причем E связано с расходом Q и импульсом K соотношением

$$KQ=\frac{20}{9}\rho^2E.$$

Задавая профиль скоростей в пограничном слое в виде $u=x^\alpha f(\xi)$, где $\xi=yx^\beta$, и соответственно этому функцию тока $\psi=\frac{\omega\sqrt{\nu}}{2}(4x)^{\alpha-\beta}\varphi(\eta)$, где $\eta=\frac{\omega}{2\sqrt{\nu}}y(4x)^\beta$, автор, используя интегральное соотношение (1), определяет постоянные α и ω и находит, что задача сводится к интегрированию уравнения

$$\varphi'''+\varphi\varphi''+2\varphi'^2=0$$

при граничных условиях

$\varphi=\varphi'=0$ при $\eta=0$; $\varphi'=0$ при $\eta=\infty$.

Далее задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d\varphi}{d\eta}=\frac{2}{3}(N^{3/2}\varphi^{1/2}-\varphi^2),$$

которое проводится в квадратурах.

В какой мере выбранный профиль отражает истинное распределение скоростей в пограничном слое, нельзя проверить ввиду отсутствия экспериментальных данных и других решений аналогичных задач. То же самое можно сказать и о других результатах, приведенных в окончательном виде (без вывода) в конце работы и относящихся к выражениям для трения на стенке, расходу и импульсу в полуограниченной струе.

Для сравнения приведены некоторые характерные величины для свободной и полуограниченной струй и построены кривая $\varphi'=\varphi'(\eta)$ и кривые безразмерных скоростей в ламинарном пограничном слое на пластинке и для свободной ламинарной струи. Из графика видно, что кривая скоростей на пластинке очень похожа на кривую профиля скоростей полуограниченной струи. *А. К. Павлин*

1786. Вариационные методы в теории сопротивления. Карлсон, Хендриксон (Variational methods for problems in resistance. Carlson J. F., Hendrickson T. J.), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 12, 1462—1465 (англ.)

Рассматривается задача об установившемся токе (гармоническая проблема) в цилиндре радиуса b и высоты l при граничных условиях для потенциала $\Phi(r, z)$:

$$\Phi(r,0)=V_0,\qquad 0\leqslant r\leqslant b;$$
$$\Phi(r,l)=0,\qquad 0<a<r<b;$$
$$\frac{\partial\Phi(r,l)}{\partial z}=0,\qquad 0<r<a;$$
$$\frac{\partial\Phi(b,z)}{\partial r}=0,\qquad 0\leqslant z\leqslant l.$$

Цель авторов — получение двусторонних приближений для величины сопротивления цилиндра. Применяемый при этом метод авторы приписывают Швингеру (J. S. Schwinger, неопубликованные лекции). Используется явное выражение функции Грина рассматриваемой граничной задачи в двух частных случаях $a=b$ и $a=0$; получается два различных интегральных уравнения первого рода, соответственно для величин $\frac{\partial\Phi(r,l)}{\partial z}$ и $\Phi(r,l)$. Эти уравнения сводятся к двум вариационным проблемам. Первая из них состоит в отыскании минимума выражения

$$\Gamma=\int_a^b\int_a^b r\chi(r)K_1(r,r')r'\chi(r')\,dr\,dr'\left[\int_a^b r\chi(r)\,dr\right]^{-2},$$

вторая — в отыскании минимума выражения

$$\Lambda=\int_0^a\int_0^a r\psi(r)K_2(r,r')r'\psi(r')\,dr\,dr'\left[\int_0^a r\psi(r)\,dr\right]^{-2}.$$

Здесь

$$K_1(r,r')=\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{th}(\lambda_n l)\,J_0(\lambda_n r)\,J_0(\lambda_n r')}{\lambda_n l J_0^2(\lambda_n b)},$$

$$K_2(r,r')=\sum_{n=1}^\infty\frac{\lambda_n l J_0(\lambda_n r)\,J_0(\lambda_n r')}{\operatorname{th}(\lambda_n l)\,J_0^2(\lambda_n b)},$$

а числа λ_n определяются уравнением $J_1(\lambda_n b)=0$. Устанавливается связь между величинами искомых минимумов и сопротивлением; выясняется, что приближения сверху к величинам Γ и Λ (при помощи допустимых функций $\chi(r)$ и $\psi(r)$) позволяют получать для сопротивления приближения сверху и снизу. Авторы приводят результаты расчетов для ряда значений параметров, причем отмечают, что соответствующие вычисления довольно громоздки.

М. Ш. Бирман

1787. Применение функционального анализа в теории пологих тонких упругих оболочек. Жгенти В. С., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 2, 217—219

Ставится краевая задача об интегрировании полученных референтом (Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, № 4, 399—418) уравнений равновесия произвольной пологой упругой оболочки, край которой жестко закреплен. Устанавливается неравенство

$$(\mathbf{AU},\mathbf{U})\geqslant\gamma^2\{D[u]+D[v]+K[w]\},$$
$$\gamma^2=\text{const}>0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}$ — вектор смещения, подчиненный условиям жесткого закрепления края, $\mathbf{A}$ — оператор, определяемый левыми частями упомянутых выше уравнений равновесия, u и v — касательные, а w — нормальная составляющая вектора $\mathbf{U}$. Наконец,

$$D[\varphi]=\iint_{G_0}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

$$K[\varphi]=\iint_{G_0}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy,$$

где G_0 — проекция срединной поверхности оболочки на плоскость (x, y). Из неравенства (1) вытекает положительная определенность оператора $\mathbf{A}$ и, следовательно, разрешимость поставленной краевой задачи.

Полученный результат обобщает более ранний результат того же автора (РЖМат. 1953, 1212), относящийся к оболочке, срединная поверхность которой имеет форму эллиптического параболоида.
С. Г. Михлин

1788. Функция Грина упругой пластины. Дин (The Green's function of an elastic plate. Dean W. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, № 2, 319—326 (англ.)

Строится функция Грина для бесконечной пластины, закрепленной вдоль лучей $(1, \infty)$ и $(-1, -\infty)$. Для этого случая найдено сравнительно простое решение задачи, тогда как обычно функцию Грина упругой пластины не удается выразить в конечном виде.
И. Д. Калафати

1789. Эффект малой сферической полости в полубесконечном упругом теле, находящемся под действием пары, приложенной к плоской границе. Дас (On the effect of a small spherical cavity in a semiinfinite elastic solid under stresses produced by a couple on the plane boundary. Das Sisir Chandra), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 43, № 3, 89—93 (англ.)

Решение поставленной задачи проводится в биполярных координатах (ξ, η, φ),

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin\eta\cos\varphi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\sin\eta\sin\varphi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta},$$

$$\frac{z}{a} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta};$$

$\xi = 0$ — уравнение плоской границы тела, $\xi = \alpha$ — уравнение поверхности сферической полости.

Из всех компонент упругих смещений и напряжений не равными нулю оказываются только перемещение $u_\varphi = w$ и касательные напряжения $\tau_{\xi\varphi}$ и $\tau_{\eta\varphi}$. Перемещение w ищется в виде суммы $w_1 + w_2$, где $w_1 = -\rho M / 4\pi\mu(\rho^2 + z^2)^{3/2}$ — известное перемещение от заданного момента M приложенной пары ($\rho^2 = x^2 + y^2$, μ — модуль сдвига), а w_2 — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho w)\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\eta}(\rho w)\right] = 0,$$

которое раскладывается в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\cos\eta)$:

$$w_2 = \frac{V\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\sin\eta}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi + B_n \operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\right]P_n'(\cos\eta).$$

Составляя выражение для напряжения $\tau_{\xi\varphi}$ и приравнивая его нулю при $\xi = 0$ и $\xi = \alpha$, автор находит значения коэффициентов A_n и B_n. Для случая $\alpha = 2$ производятся численные расчеты напряжения $\tau_{\eta\varphi}\big|_{\xi=\alpha}$.
Я. С. Уфлянд

1790. Определение напряжений при запрессовке в пластинку, ограниченную улиткой Паскаля, нескольких круглых шайб. Угодчиков А. Г., Инженерный сб., 1953, 17, 203—206

См. РЖМех, 1955, 321.

1791. Распространение электромагнитных волн вдоль конической спирали с переменным шагом. Хельгрен (The propagation of electromagnetic waves along a conical helix with variable pitch. Hellgren Gösta), Chalmers tekn. högskol. handl., 1953, № 130, 3—13 (англ.)

Исследуется распространение электромагнитных волн вдоль абсолютно тонкой конической поверхности, идеально проводящей только в одном направлении, которое соответствует направлению витков реальной спирали. Вершина этой поверхности выбирается за центр сферической системы координат, ось z направлена по оси конуса. Задача состоит в отыскании не зависящего от φ решения уравнений Максвелла при граничных условиях на «спирали»:

$$E_r^i \sin\xi - E_\varphi^i \cos\xi = E_r^e \sin\xi - E_\varphi^e \cos\xi = 0,$$

$$E_r^i \cos\xi + E_\varphi^i \sin\xi = E_r^e \cos\xi + E_\varphi^e \sin\xi,$$

$$H_r^i \sin\xi - H_\varphi^i \cos\xi = H_r^e \sin\xi - H_\varphi^e \cos\xi,$$

$$H_\theta^i = H_\theta^e$$

(ξ — угол, который составляют витки «спирали» с сечением, перпендикулярным ее оси).

Опуская временной множитель $e^{j\omega t}$, автор записывает поля внутри и вне спирали в виде произведения цилиндрической функции на функцию $P_{-1/2+j\varkappa}(\cos\theta)$ — общее решение уравнения Лежандра.

Зависимость параметра разделения $\varkappa$ от угла ξ устанавливается из граничных условий. Последние приводят к следующему соотношению между ξ и $\varkappa$:

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{4}{4\varkappa^2+1} \times$$

$$\times \sqrt{-\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}P_{-1/2+j\varkappa}(\cos\theta_0)\;\frac{\partial}{\partial\theta}P_{-1/2+j\varkappa}(-\cos\theta_0)}{P_{-1/2+j\varkappa}(\cos\theta_0)\;\;P_{-1/2+j\varkappa}(-\cos\theta_0)}},$$

показывающему, что разделение переменных в задаче возможно лишь при условии пропорциональности между $\operatorname{tg}\xi$ и r.

Используя представление Дебая для цилиндрических функций в соответствующей форме, автор дает приближенный расчет коэффициента отражения и импеданса исследуемой системы. Приводятся некоторые графики.
Д. П. Костомаров

1792. О регулярной теории поля. I. (Классическая теория). Райский (On a regular field theory. I. (Classical). Rayski Jerzy), Acta phys. polon., 1953, 11, № 3—4, 314—327 (англ.)

Слегка сокращенная первая часть статьи под тем же названием (РЖМат, 1954, 3008). Рассматриваются классические неквантованные поля. Из вариационного принципа выводятся уравнения движения, а также интегральные законы сохранения для полного заряда, энергии, количества движения и момента системы.

Изменено доказательство теоремы существования решения системы интегральных уравнений поля и сделаны небольшие редакционные поправки в тексте статьи. Новых результатов не имеется.
Ю. Н. Днестровский

1793. О динамике испарения поликомпонентных растворов с нелетучим растворителем. Рубинштейн Л. И., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 4, 767—769

В некоторых упрощающих предположениях для функции $V_i(t) = \frac{\partial C_i}{\partial x}\Big|_{x=0}$, где $C_i(x, t)$ — концентрация пара i-го компонента, выводится уравнение

$$V_i(t) = -\frac{C^0_{mi}}{n_0\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{C^0_{mi}\sqrt{D_i}}{n_0\sqrt{\pi}}\int_0^t V_i(s)\,\frac{ds}{\sqrt{t-s}}.$$

Здесь D_i — коэффициент диффузии пара i-го компонента, C^0_{mi} — концентрация насыщенного пара над i-ым компонентом в жидкой фазе, n_0 — постоянная (знаменатель молярных дробей компонентов). Это неоднородное уравнение Абеля решается операционным методом, после чего мощность испаряющегося слоя и скорости испарения отдельных компонентов находятся как функции времени. *В. И. Левин*

1794 Е. Математическая теория неоднородных газов. Чэпмен, Каулинг (The Mathematical theory of non-uniform gases. Chapman S., Cowling T. G., XXIII+431, New York, Cambridge University Press, 1953, 10.50 doll.), Scient. Monthly, 1953, **76**, № 6, II (библ.)

1795 РЕЦ. Математические основы теории пластичности. Гросс (Mathematical structure of the theories of viscoelasticity. Gross B., 74 pp., Paris, Act. sc. et ind. Hermann, 1953, 600 fr.) [**Рецензия**: **Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 11-12, 372 (франц.)

См. также: 1624, 1694, 1807, 1818, 1824, 1825, 1831, 1840, 1852, 1854, 1857 Д, 1917, 1954, 1957, 1958.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1796. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Эбаноидзе Т. А., Сообщ. АН Груз. ССР, 1954, **15**, № 1, 7—12

В первой части работы доказывается существование единственного в L_p $(p > 1)$ решения уравнения

$$y(P) = f(P, \lambda\int_B K(P, Q, y(Q))\,dQ), \qquad (1)$$

где B — n-мерный куб $(a \leqslant x_i \leqslant b)$, в предположении, что:

а) если $f(P) \in L_p$, то $f(P, y(P)) \in L_p$ и $|f(P, z_2) - f(P, z_1)| \leqslant N|z_2 - z_1|$ (N — const);

б) если $y(Q) \in L_p$, то $\int_B K(P, Q, y(Q))\,dQ \in L_p$ и $|K(P, Q, z_2) - K(P, Q, z_1)| \leqslant g(P, Q)|z_2 - z_1|$;

в) $|\lambda| N N_1 < 1$,

где

$$N_1 = \left\{\int_B\left[\int_B |g(P, Q)|^{p/(p-1)}\,dQ\right]^{p-1} dP\right\}^{1/p}.$$

Уравнение (1) является частным случаем уравнения, рассмотренного В. В. Немыцким (Докл. АН СССР, 1937, **15**, № 1, 17—19) в предположении, что $q(P, Q)$ от Q не зависит. Однако отметим, что случай, когда $q(P, Q)$ зависит от Q, не осложняет доказательства.

Во второй части работы доказывается существование единственного в пространстве C решения системы уравнений

$$y_i(x) = f_i(x, \lambda\int_a^b K_{i1}(x, t, y_1, \ldots, y_n)\,dt, \ldots$$

$$\ldots, \lambda\int_a^b K_{in}(x, t, y_1, \ldots, y_n)\,dt), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

в предположении, что:

а) при $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < z_1, \ldots, z_n < +\infty$ $f_i(x, z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны и

$$|f_i(x, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) - f_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant N_i\sum_{j=1}^n |\bar{z}_j - z_j|;$$

б) при $a \leqslant x, t \leqslant b$, $-\infty < z_1, \ldots, z_n < +\infty$, $K_{ij}(x, t, z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны и

$$|K_{ij}(x, t, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) - K_{ij}(x, t, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant g(t)\sum_{k=1}^n |\bar{z}_k - z_k|;$$

в) $|\lambda| N < 1$, где $N = n\sum_{i=1}^n N_i\int_a^b g(t)\,dt$.

Доказательства этих теорем основаны на применении принципа сжатых отображений.

В упомянутой выше работе В. В. Немыцкий указал, что применением принципа сжатых отображений можно получить теоремы существования решений систем нелинейных интегральных уравнений, частным случаем которых является система (2).

В заключение отметим, что первая теорема О. Женхэна (Докл. АН СССР, 1952, **86**, № 2, 229—230), на которую указывает автор, содержится в теореме 1 В. В. Немыцкого. *Я. В. Быков*

1797. Об интегральном уравнении $xu(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t))\,dt$. Сато (Sur l'équation intégrale $xu(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t))\,dt$. Satō Tokuji), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 2, 145—153 (франц.)

Для нелинейного интегрального уравнения тип Вольтерра

$$xu(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t))\,dt \qquad (1)$$

с полярной особенностью $x = 0$ изучен вопрос о существовании и единственности аналитического решения

$$u(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

в случае аналитических функций $f(x)$, регулярной при $|x| < r$, и $K(x, t, u)$, регулярной при $|x| < r$, $|t| < r$, $|u - c_0| < \rho$. Доказаны две теоремы:

Теорема 1: Если ряд (2) формально удовлетворяет уравнению (1), то он имеет положительный радиус сходимости и представляет решение $u(x)$ уравнения (1), обладающее свойством $u(x) = P_n(x) + o(x^n)$, где $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$, $n = [|\lambda|] + 1$, $\lambda = K_u(0, 0, c_0)$.

Теорема 2: Пусть $c_0 = a_1 + K(0, 0, c_0)$. Если λ не является целым положительным числом, то уравнение (1) имеет решение (2) и притом единственное. В случае целого λ, вообще говоря, не существует решения (2), но если существует хотя бы одно решение, то решение зависит от одной произвольной постоянной.

Единственность решения доказана при помощи леммы: если интегральное неравенство

$$xu(x) \leqslant \nu \int_0^x u(t)\,dt, \qquad 0 < \nu,\ 0 < x,$$

имеет решение $u(x)$, непрерывное в интервале I: $0 < x \leqslant r$ и допускающее оценку $0 \leqslant u(x) = o(x^{\nu-1})$, то необходимо $u(x) \equiv 0$.

Далее исследуется вопрос о поведении решения уравнения (1) в окрестности данного аналитического решения путем сведения к решению интегрального уравнения

$$xu(x) = \int_0^x K(x, t, u(t))\,dt, \qquad (3)$$

где $K(x, t, u)$ аналитична в области $|x| < r$, $|t| < r$, $|u| < \rho$ и где $K(x, t, 0) \equiv 0$, $K'_u(0, 0, 0) = \lambda$.

Автор указывает, что он следует методу, данному М. Хукухара (M. Hukuhara) в его книге «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (Иванами, 1950) (япон.).

Опечатка: на стр. 147 при определении функции $\overline{w}(x)$ в подинтегральном выражении должно быть $L(x, t, w) = K(x, t, w + P_n(t)) - K(x, t, P_n(t))$ вместо $K(x, t, w)$. *А. Я. Лусис*

1798. Представление вектора смещения запаздывающими потенциалами. Аржаных И. С., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 3, 393—396

Результаты статьи вошли в книгу автора (см. реф. 1799)Ж

1799 К. Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости. Аржаных И. С., стр. 1—106, Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1954, 8 р. 90 к.

Книга посвящена построению различных интегральных уравнений, соответствующих основным граничным задачам теории поля и теории упругости, и состоит из трех частей.

Наиболее важны последние две части, посвященные теории упругости; охарактеризуем кратко их содержание.

Во II-ой части доказаны три основные теоремы:

Теорема *A*. Если $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, h — три гармонических вектора, а g — гармоническая скалярная функция, то вектор

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} + \mathbf{H} + \operatorname{grad}(g - \varkappa_0(\mathbf{qG})) + \operatorname{rot}(\mathbf{h} - \lambda_0[\mathbf{qH}]),$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, z)$ — радиус-вектор переменной точки, $\varkappa_0 = (\lambda + \mu)/2(\lambda + 2\mu)$, $\lambda_0 = (\lambda + \mu)/2\mu$, λ и μ — постоянные Ламе, $(\mathbf{qG})$ — скалярное произведение и $[\mathbf{qH}]$ — векторное произведение, есть решение уравнения теории упругости

$$\Delta^* \mathbf{u} \equiv \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \qquad (1)$$

Теорема *B*. Если $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Omega}$ — два гармонических вектора, а Θ — гармонический скаляр, связанные равенствами

$$(1 + 3\varkappa_b)\Theta = \operatorname{div} \mathbf{\Lambda} - \varkappa_b(\mathbf{q} \operatorname{grad} \Theta) + \lambda_b(\mathbf{q} \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}),$$

$$(1 - 2\lambda_b)\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{\Lambda} + \varkappa_b[\mathbf{q} \operatorname{grad} \Theta] - \lambda_b(\mathbf{q} \operatorname{div} \mathbf{\Omega} - (\mathbf{q}\nabla)\mathbf{\Omega}),$$

где $\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$, $\varkappa_b = (b(\lambda + 2p) - 1)/2$, $\lambda_b = (1 - b\mu)/2$, $b \neq 0$, то вектор

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda} - \varkappa_b \mathbf{q}\Theta - \lambda_b \mathbf{\Omega}[\mathbf{q}]$$

есть решение уравнения (1).

Теорема *C*. Вектор, удовлетворяющий интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathbf{u}(p) = -\frac{\varkappa_c}{2\pi}\int_Q \Theta(q)\,\nabla_q \Phi(p, q)\,dq + \frac{\lambda_c}{2\pi}\int_Q [\mathbf{\Omega}(q)\,\nabla_q \Phi(p, q)]\,dq + \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_S (\varkappa_c \mathbf{n}\vartheta + \lambda_c[\mathbf{n}\omega])\,\Phi(p, s)\,ds + \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\Phi - \mathbf{u}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) ds,$$

где $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$, $\vartheta = \Theta(s)$, $\omega = \Omega(s)$, s — точка на S, S — замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая объем Q, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль $\varkappa_c = (c(\lambda + 2\mu) - 1)/2$, $\lambda_c = (1 - c\mu)/2$, $c \neq 0$, $\Phi(p, q) = \varphi(pq) + 1/r(p, q)$, $r(p, q)$ — расстояние, $\varphi(p, q)$ — гармоническая функция точек p и q в области Q, $\varepsilon_0 = \pm 1$, удовлетворяет уравнению (1).

Каждая из этих теорем служит автору для конструирования целого ряда специальных решений уравнений (1), применяемых затем для составления интегральных соотношений, отвечающих граничным задачам.

Далее вводится понятие «общей нормальной производной вектора $\mathbf{u}(q)$ в точке $s \in S$», под которым автор понимает предел

$$\Delta_n \mathbf{u} \equiv \lim_{q \to S} \{(2\mu + a)(\mathbf{n}\nabla_q)\mathbf{u}(q) + (\lambda - a)\mathbf{n}(\nabla_q \mathbf{u}) + (\mu + a)[\mathbf{n}[\nabla_q \mathbf{u}]],$$

обращающийся при $\alpha = 0$ в значение вектора напряжения $d_n \mathbf{u}$, и с помощью теоремы Остроградского

доказывается теорема о представимости всякого достаточно гладкого вектора $\mathbf{u}(q)$ в виде суммы некоторых интегралов по объему Q и по поверхности S.

Таким путем вводятся два типа потенциалов: «векторный потенциал объемной деформации»

$$\mathbf{E}_u = \int_Q \mathbf{D}(\mathbf{u}, p)\, dp, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{i}T(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}) + \mathbf{j}T(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}) + \mathbf{k}T(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}),$$

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (2\mu + a)(\operatorname{grad}\mathbf{u}\operatorname{grad}\mathbf{v}) + (\lambda - a)\operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} - (\mu + a)(\operatorname{rot}\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{v}),$$

и «векторный потенциал поверхностной деформации»

$$\mathbf{w}(q) = \int_S K(q, s; a)\,\mathbf{u}(s)\, ds, \tag{3}$$

где

$$K(q, s; a) = (I + \nu_a)\left\{\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\frac{1}{r}\right) + \zeta_a\frac{1}{r^2}\left\{\mathbf{n}_s\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right\},$$

ν_a, ζ_a — определенные постоянные и

$$\left\{\mathbf{n}_s\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right\} = \begin{Vmatrix} 0, & -\left[\mathbf{n}_s, \frac{\mathbf{r}}{r}\right]_3, & \left[\mathbf{n}_s, \frac{\mathbf{r}}{r}\right]_2 \\ \left[\mathbf{n}_s, \frac{\mathbf{r}}{r}\right]_3, & 0, & -\left[\mathbf{n}_s, \frac{\mathbf{r}}{r}\right]_1 \\ -\left[\mathbf{n}_s, \frac{\mathbf{r}}{r}\right]_2, & \left[\mathbf{n}_s, \frac{\mathbf{r}}{r}\right]_1, & 0 \end{Vmatrix}$$

Далее выводится еще одно интегральное представление регулярного вектора $\mathbf{u}(q)$ при помощи определенных интегралов по объему и по поверхности:

$$4\pi(1 + \varepsilon_q)\,\mathbf{u}(q) = -\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}\int_Q L(p, q)\,\Delta^*\mathbf{u}(p)\, dp + \varepsilon\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}\int_S L(s, q)\,\Delta_n\mathbf{u}(s)\, ds - \varepsilon\frac{2\mu^2 - a(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)}\int_S K(s, q; a)\,\mathbf{u}(s)\, ds. \tag{4}$$

Таким путем вводятся в рассмотрение еще два новых типа потенциалов: «векторный потенциал объемных сил»

$$\mathbf{U}(q) = \int_Q L(p, q)\,\Delta^*\mathbf{u}(p)\, dp \tag{5}$$

и «векторный потенциал поверхностных сил»

$$\mathbf{v}(q) = \int_S L(s, q)\,\Delta_n\mathbf{u}(s)\, ds. \tag{6}$$

Непосредственно проверяется, что потенциалы поверхностных деформаций (3) и поверхностных сил (6) удовлетворяют уравнению (1).

Доказывается, что потенциал поверхностных сил с плотностью $\sigma(p)$, удовлетворяющей определенным условиям гладкости, есть непрерывная функция во всем пространстве, а первые производные терпят разрыв при переходе от внутренних точек к внешним через поверхность S, причем имеют место следующие формулы, определяющие разрыв:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_\nu}\right)_{i,a} = \pm 2\,\mathbf{II}\,\alpha_\nu + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_\nu},\quad \nu = 1, 2, 3,$$

где α_ν — проекция нормали, а

$$\mathbf{II} = 2\pi\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 3\mu}\left(\sigma - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\sigma)\right).$$

Для векторного потенциала поверхностных деформаций, являющегося аналогом потенциала двойного слоя, доказываются формулы скачков:

$$\mathbf{w}_{i,a} = -\varepsilon\chi_a\rho(t) + \mathbf{w}(t),$$

где $\chi_a = 4\pi\mu(\lambda + 2\mu)/[2\lambda\mu - (\lambda + \mu)a]$, $\varepsilon = \pm 1$.

Эти формулы, как обычно, приводят решение первой внутренней задачи, разыскиваемой в виде потенциала поверхностных деформаций

$$\mathbf{w}(q) = \int_S K(s, q; a)\,\rho(s)\, ds,$$

к уравнению для $\rho(t)$:

$$-\chi_a\rho(t) + \int_S K(t, s; a)\,\rho(s)\, ds = \mathbf{u}_s(t), \tag{7}$$

где $\mathbf{u}_s(t)$ — заданное на S значение вектора смещений.

Интегральное уравнение второй задачи автор снова получает с помощью формулы (4).

Рассуждения, которые применяет автор для исследования характеристических чисел своих уравнений, представляют перенесение на уравнения теории упругости известной схемы, применяемой при исследовании распределения характеристических чисел в граничных задачах гармонических функций (см., например, Kellogg O., Foundations of potential theory, 309—315), но при этом автор обходит молчанием тот факт, что уравнения (7) и др. не являются уравнениями Фредгольма. Между тем, это свойство лежит в основе указанной выше схемы исследования характеристических чисел.

В заключение этой главы строится серия регулярных интегральных уравнений, которые получаются из теоремы C.

В главе III рассмотрены граничные задачи динамики упругого тела: требуется найти вектор $\mathbf{v}(q, t)$ (t — время), удовлетворяющий:

а) уравнению

$$\Delta_q^t\mathbf{v} \equiv \alpha\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \beta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} - (\partial^2\mathbf{v}/\partial t^2) = \mathbf{f}, \tag{8}$$

$$\alpha = (\lambda + 2\mu)/\rho,\quad \beta = \mu/\rho;$$

б) начальным условиям

$$\mathbf{v}(q, o) = \mathbf{v}_0,\qquad (\partial\mathbf{v}/\partial t)_{t=0} = \mathbf{v}_0';$$

в) граничным условиям

$$\mathbf{v}(S, t) = \mathbf{v}_s \qquad \text{(первая задача)} \tag{9}$$

или

$$d_n\mathbf{v} \equiv 2\mu(\partial\mathbf{v}/\partial n) + \lambda\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mu[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = \mathbf{T} \tag{10}$$

(вторая задача).

Путь, избранный автором, состоит в приведении формулированных граничных задач с начальными условиями (первая и вторая задача Коши) к первой и второй граничной задаче для стационарных упру-

гих колебаний. Достигается это, как известно, с помощью преобразования Лэпласа.

Заключительные параграфы книги посвящены конструкции интегро-дифференциальных уравнений, эквивалентных задачам Коши (8) и (9) или (8) и (10).

Построенные в книге уравнения часто не разграничены четко, между ними во многих случаях нет и не может быть существенных различий даже тогда, когда автор относит их к различным группам введенной им классификации.

Не доказывается эквивалентность полученных уравнений исходным задачам (лишь в некоторых случаях она очевидна), не исследована разрешимость; как это отмечено самим автором, встречаются опечатки, неоправданные, иногда и вовсе непоясненные обозначения и просто непонятные места, затрудняющие чтение этой интересной книги.

В. Д. Купрадзе

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1800. Проблема стационарного движения в газовом лучистом слое. Погожельский В., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 1,5—6

Ищется одномерное установившееся движение идеального газа в слое $0 \leqslant x \leqslant a$ при наличии полихроматического излучения. Считаются заданными скорость, плотность и температура при $x = 0$: $u_0 \neq 0$, $\rho_0 > 0$, $T_0 > 0$, и интенсивности излучения на краях слоя $X_1(\lambda, \theta)$ и $X_2(\lambda, \theta)$, где λ — длина волны, а θ — угол, характеризующий направление излучения. Коэффициент поглощения $\alpha = \nu(\lambda)\rho(x)$; функция $\nu(\lambda)$ задана.

Исключив скорость и давление, автор получает систему двух сложных нелинейных интегральных уравнений для определения функций $\rho(x)$ и $T(x)$. Утверждается, что методом последовательных приближений можно доказать существование решения у этой системы при достаточно малых a. Доказательства не приведены.

И. М. Соболь

1801. О расчете балок, лежащих на упругом основании переменной жесткости. Кильчевский Н. А., Фрадлин Б. Н., Шахновский С. М., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1953, **12**, 3—10

Рассматривается балка, подверженная действию двух систем сил — основной и вспомогательной. Основная система состоит из единичной силы, приложенной в точке ξ балки, реакции упругого основания переменной жесткости $k(x)$ и реакций опор на концах балки. Вспомогательная система состоит из единичной силы, приложенной в точке x балки, реакции, которая возникла бы, если бы балка лежала на упругом основании постоянной жесткости k_0, и реакций опор. Обозначая через $\bar{u}(\xi, x')$ и $v(x, x')$ смещения, вызванные в точке x' основной и соответственно вспомогательной системой сил, авторы получают на основании теоремы о взаимности работ интегральное уравнение для неизвестной функции $\bar{u}(\xi, x)$:

$$\bar{u}(\xi, x) = v(x, \xi) + \int_0^l [k_0 - k(x)]\, v(x, \xi_1)\, \bar{u}(\xi, \xi_1)\, d\xi_1,$$

которое затем они приближенно решают. Вычисленное значение $\bar{u}(\xi, x)$ используется для расчета динамического прогиба балки.

Примечание референта. Известны и другие решения задачи о балке, лежащей на упругом основании переменной жесткости; такое решение приведено, например, в книге Ш. Е. Микеладзе «Некоторые задачи строительной механики», Гостехиздат, 1948, 188—191.

С. Г. Михлин

1802. Применение интегральных уравнений к решению задач, связанных с нелинейными электрическими контурами. Пайпс (Applications of integral equations to the solution of nonlinear electric circuit problems. Pipes L. A.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, ч. 1, 445—450 (англ.)

Уравнение $Z(D)\, i(t) + F\{i(t)\} = e(t)$ с помощью теоремы о свертке (интеграла Дюамеля) приводится к виду уравнения Лалеско:

$$i(t) = i_0(t) - \int_0^t h(t-u)\, F\{i(u)\}\, du,$$

для которого, в определенных предположениях, $i(t) = \lim_{n\to\infty} i_n(t)$, где

$$i_{n+1}(t) = i_0(t) - \int_0^t h(t-u)\, F\{i_n(u)\}\, du,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Для практического вычисления $i_n(t)$ предлагается вернуться к преобразованию Лапласа и его обращению:

$$i_{n+1}(t) = i_0(t) - L^{-1}\{[LF(i_n(t))]/Z(p)\},\ n = 0,1,2,\ldots$$

Вычисления проводятся для ряда конкретных примеров: для контура с нелинейным сопротивлением $F(i) = R_0 i^2$ и т. д. В заключение рассматривается уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

и методом интегральных уравнений исследуется его решение в случае малых μ (квазилинейные колебания).

В. И. Левин

См. также: 1738, 1769, 1804.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1803. Об одном классе функций n переменных и некоторых вопросах вариационного исчисления. Стампаккья (Sopra una classe di funzioni in n variabili e su alcune questioni di calcolo delle variazioni. Stampacchia Guido), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 232—238 (итал.)

Формулируется (без доказательства) теорема существования абсолютного минимума интеграла

$$H[u] = \int_T f(x, u, \Delta_2 u)\, dx,$$

где

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta_2 u = \sum_i \partial^2 u / \partial x_i^2$.

Предполагается, что функционал $H[u]$ положительно квазирегулярен и удовлетворяет условию

$$f(x,\ u,\ w) \geqslant mw^2 + m_1,$$

где $m > 0$ и m_1 — постоянные.

Совокупность допустимых функций подчиняется следующим требованиям:

а) $u(x)$ и $\partial u/\partial x_j$ абсолютно непрерывны относительно переменной x_j для почти всех точек

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

$$j = 1,2, \ldots, n,$$

в ограниченной области $T \subset R^n$, граница которой Γ есть дифференцируемое многообразие $n-1$ измерений;

б) производные $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_k$ имеют суммируемые квадраты в T;

в) функции u и $\partial u/\partial x_i$ обладают свойством «μ_{u-2}-квазинепрерывности», т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой из рассматриваемых функций можно определить такое множество J, проекции которого на координатные пространства $n-2$ измерений имеют меру меньшую ε, причем рассматриваемая функция непрерывна вне J. При этих условиях для почти всех $M \in \Gamma$ существуют пределы $\lim u(P)$, $\lim (du/dn)_P$, когда P стремится к M по нормали к Γ, где du/dn — производная по направлению этой нормали.

Для допустимых функций предполагается, что эти два предела равны соответственно двум наперед заданным функциям $\lambda(M)$ и $\mu(M)$, $M \in \Gamma$, имеющим интегрируемые квадраты на Γ.

Утверждается, что если найдется по крайней мере одна допустимая функция, для которой $H[u] < +\infty$, то $H[u]$ достигает абсолютного минимума. При некоторых дополнительных предположениях относительно подинтегрального выражения решение удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению.

Кроме того, сформулирована теорема существования минимума интегралов вида

$$\int_T f(x,\ \partial u,\ u/\partial x_1 \ldots,\ \partial u/\partial x_n)\, dx.$$

А. Г. Сигалов

1804. Вариационная задача, связанная с теорией реактора. Уилкинс (A variational problem in reactor theory. Wilkins J. Ernest, Jr.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 345—348 (англ.)

Пусть C — ограниченное измеримое множество в трехмерном евклидовом пространстве, $H(x, y)$ — симметричная функция, квадратично интегрируемая на множестве точек (x,y) с $x \in C$, $y \in C$, не равная почти всюду нулю. Пусть $u(x)$ — ограниченная, измеримая, неотрицательная функция на C, почти всюду отличная от нуля. По определению, $u(x)$ принадлежит классу U, если существует неотрицательная функция $v(x) \in L_2(C)$, почти всюду отличная от нуля, для которой

$$v(x) = \int_C H(x,\ y)\, u(y)\, v(y)\, dy. \qquad (1)$$

Задача заключается в нахождении функции $u_0(x) \in U$, минимизирующей интеграл $I[u] = \int_C u(x)dx$ на U.

Доказывается теорема:

Если $u_0(x) \in U$, $\lambda_n \leqslant \lambda_1 < \lambda_0 = 1$ $(n = 2,\ 3,\ \ldots)$ — собственные значения уравнения (1) при $u_0(x)$ и если собственная функция $v_0(x)$ постоянна, то

$$\int_C u(x)\, dx \geqslant \int_C u_0(x)\, dx,$$

где $u(x) \in U$ и $u(x) \geqslant \lambda_1 u_0(x)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_C H(x,y)\ [u(y) - u_0(y)]\, dy = 0.$$

При доказательстве используются результаты Цанена (Zaanen A. C., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1946, **49**, 292—301, Indagationes math., 1946, **8**, 161—170). *Л. Я. Цлаф*

См. также: 1755, 1757, 1786, 1856

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

1805. Некоторые вопросы преобразования эллиптических интегралов к нормальному виду. Мостков М. М., Тр. Новосибир. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр. 1954, **6**, 94—114

Рассматриваются случаи, когда выражения, приводящиеся к эллиптическим интегралам 3-го рода

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \qquad (1)$$

соответствующими преобразованиями переменной φ, выражаются через эллиптические интегралы 1-го и 2-го родов и элементарные функции.

Случаи А), Б), В) относятся к самому интегралу (1).

А) $n = -k^2$, подстановка $k\sin\varphi = \sin\psi$.

Б) $n + 1 > 0$, $k^2 = -n(2+n)$ $(k^2 < 1)$, подстановка $\operatorname{tg}\varphi = [\operatorname{tg}(\psi/2)]/\sqrt{n+1}$.

Аналогично и в случае, когда: $k^2 = -n^2/(2n+1)$, $2n + 1 < 0$ $(k^2 < 1)$.

В) $n = \pm k$ $(k > 0)$, подстановка $\sin\varphi = [\operatorname{tg}(\psi/2)]\sqrt{k}$.

Г) Показывается, что интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-\delta)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} \qquad (\alpha > \beta > \gamma)$$

при некоторых соотношениях между α, β, γ, δ может быть приведен к эллиптическим интегралам 1-го и 2-го родов.

Д) Если в интеграле

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \quad (\alpha > \beta > \gamma > \delta)$$

$\alpha + \delta = \beta + \gamma$, то соответствующей подстановкой он сводится к эллиптическому интегралу 1-го рода.

Е) Интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x^2+px+q)}}$

при $p^2 < 4q$ и $\alpha > \beta$ соответствующей подстановкой сводится к эллиптическим интегралам 1-го и 3-го родов и логарифмической функции.

В статье не используются основные литературные источники по теории эллиптических интегралов.

И. В. Матвеев

1806. Об интегральном неравенстве Чебышева. Бернацкий (Sur une inégalité entre les intégrales due à Tchébyscheff. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1951, **A5**, № 2, 23—29 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме русс., польск.)

Расширяются условия, при которых справедливо неравенство Чебышева ($p(x) \geqslant 0$)

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,p(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x)\,dx \geqslant \geqslant \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx \int_a^b g(x)\,p(x)\,dx. \qquad (1)$$

Достаточно, чтобы интервал (a, b) можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функции

$$f_1(x) = \int_a^x f(x)\,p(x)\,dx \Big/ \int_a^x p(x)\,dx,$$

$$g_1(x) = \int_a^x g(x)\,p(x)\,dx \Big/ \int_a^x p(x)\,dx$$

одновременно убывают или возрастают. Интегралы понимаются в смысле Римана.

Другого типа расширения условий, при которых справедливо неравенство Чебышева (1), объединены общей формулировкой в работе референта (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 2(42), 157—159).

Н. А. Сапогов

1807. О некоторых специальных случаях обобщенной теоремы о среднем. Байрактаревич (Neki specijalni slučajevi prvog proširenog stava o srednjim vrijednostima. Bajraktarević Mahmud), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, **8**, сер. 2, 115—128 (серб.; резюме франц.)

В прежней работе (Bajraktarević M., Vesnik Društva mat. i fiz. N. R. Srbije. Beograd, 1951, III, 3—4), автор, опираясь на работу Боянича (Bojanić R., Acad. serb. sci. Publs Inst. math., Belgrade, 1950, III) доказал теорему: пусть $\xi = \xi(x_1, x_2)$ — функция, определенная в области: $a \leqslant x_1 \leqslant b$, $a \leqslant x_2 \leqslant b$, и обладающая в этой области частными производными $p = \partial\xi/\partial x_1$, $q = \partial\xi/\partial x_2$, $s = \partial^2\xi/\partial x_1 \partial x_2$, причем $pq \neq 0$. Тогда для того чтобы существовали две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, для которых справедлива обобщенная теорема о среднем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi(x_1, x_2))}{\varphi'(\xi(x_1, x_2))} \qquad (x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2),$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) $\xi(x_1, x_2) = \xi(x_2, x_1)$; 2) $\xi(x, x) = x$; 3) $s + qdz/dx_1 + pdz/dx_2 = pqdu/d\xi$, где $u = u(\xi)$ и $z = \ln[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)]$.

В рассматриваемой работе автор дает ряд новых формулировок, эквивалентных условию 3). Например, $qdv/dx_1 + pdv/dx_2 = 2s$, где $v = u - 2z$. Отсюда вытекает, что условие 3) будет выполнено тогда и только тогда, когда существуют функции $\Phi = \Phi(\xi)$ и $\Psi = \Psi(\eta)$ такие, что $\partial^2(F\Phi\Psi)/\partial x_1 \partial x_2 = 0$ и $F(x, x) \times \times \Phi(x)\Psi(\eta(x, x)) = 0$, где $\eta(x_1, x_2) = C_1$ и $v + 2\ln F(x_1, x_2) = C_2$ — интегралы системы

$$\frac{dx_1}{q} = \frac{dx_2}{p} = \frac{dv}{2s}.$$

При этом функции φ и f определяются из уравнений

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = F(x_1, x_2) \cdot \Phi(\xi)\,\Psi(\eta)$$

и

$$u \equiv 2\ln\Phi = \ln K - \ln(f'/\varphi')'$$

(K — произвольная постоянная).

Другая формулировка получается, если ввести функцию ψ, определяемую формулой

$$\psi(\xi) = [\psi(x_1) + \psi(x_2)]/2.$$

Тогда функция $\varphi(t)$ может быть найдена из уравнения

$\psi'(t) = \varphi'(t)/\sqrt{\lambda\varphi^2(t) + \mu\varphi(t) + \nu}$ (λ, μ, ν — постоянные). Обратно, задаваясь функцией $\varphi(t)$, из последнего соотношения находим допустимую функцию $\psi(t)$. Для частного случая $\varphi(t) \equiv t$ эти результаты были получены Карамата (Karamata J., Vesnik Društva mat. i fiz. N. R. Srbije, Beograd, 1949, 1, 3—4) и Бояничем (см. выше).

В заключение рассматривается способ задания функции $\xi(x_1, x_2)$ формулой

$M(\xi) \cdot [\omega_1(x_1) + \omega_2(x_2)] = M_1(x_1)\omega_1(x_1) + M_2(x_2)\omega_2(x_2)$. Для функций M, M_i и ω_i ($i = 1, 2$) выводятся дифференциальные уравнения и для некоторых частных случаев проводится исследование их решений.

Б. П. Демидович

1808. Представление функций цепными рядами. Таргонский (Darstellung von Funktionen durch Kettenreihen. Targonszky G. I.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 286—289 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Последовательность $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f[f(x)], \ldots$ итераций функции $f(x)$ называется цепной последовательностью, а ряд $x + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ — цепным рядом.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ строго возрастает и дифференцируема в интервале J, содержащем точку $x = 0$; $f(0) = 0$, $|f(x)| > |x|$ для $x \neq 0$, $x \in J$. Тогда для $x \in J$ имеет место равенство $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$, где $g(x) = f_{-1}[f(x) - x]$, f_{-1} — функция, обратная для f.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку $x = 0$, и $f'(0) \neq 0$. Тогда в интервале J, содержащем точку $x = 0$ и в котором $f(x)$ строго монотонна, имеет место равенство $f(x) = f(0) + p^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$, где $G(x) = f_{-1}[f(x) - (x/p)]$ и p — произвольное число такое, что

$$|p| > \max_J |x/(f(x) - f(0))|, \quad \operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn} f'(0).$$

Г. В. Корицкий

1809. Обобщение функционального уравнения бисимметрии. Хоссу (A generalization of the funictional equation of bisymmetry. Hosszu M.), Studia math. 1953, **14**, № 1, 100—106 (англ.)

Ацел показал (Aczél J., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, **54**, № 4, 392—400), что наиболее общие строго монотонные и непрерывные решения уравнения бисимметрии $F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)]$ имеют вид $F(x, y) = \varphi^{-1}[p\varphi(x) + q\varphi(y) + r]$. Автор рассматривает более общее функциональное уравнение

$$F[G(x, y), H(u, v)] = f[g(x, u), h(y, v)] \qquad (1)$$

и доказывает, что строго монотонные и дифференцируемые функции F, G, H, f, g, h удовлетворяют уравнению (1) тогда и только тогда, когда существует девять строго монотонных и дифференцируемых функций χ, Φ, Ψ, φ, ψ, X_1, X_2, Y_1, Y_2 и постоянная k такие, что

$$f(x, y) = \chi[\varphi(x) + \psi(y)], \quad F(x, y) = \chi[\Phi(x) + \Psi(y)],$$
$$g(x, y) = \varphi^{-1}[X_1(x) + X_2(y) + k],$$
$$G(x, y) = \Phi^{-1}[X_1(x) + Y_1(y)],$$
$$h(x, y) = \psi^{-1}[Y_1(x) + Y_2(y) - k],$$
$$H(x, y) = \Psi^{-1}[X_2(x) + Y_2(y)].$$

Решения уравнения (1) принимают простую форму при дополнительных предположениях. Рассмотрены три частных вида уравнения (1):

$$F[f(x, y), f(u, v)] = f[F(x, u), F(y, v)], \quad (2)$$
$$F[g(x, y), g(u, v)] = f[g(x, u), g(y, v)], \quad (3)$$
$$F[g(x, y), g(u, v)] = f[g(x, u), g(v, y)]. \quad (4)$$

Для строго монотонных и дифференцируемых решений этих уравнений найден следующий общий вид.

Для уравнения (2) $F(x, y) = \varphi^{-1}[P\varphi(x) + Q\varphi(y) + R]$, $f(x, y) = \varphi^{-1}[p\varphi(x) + q\varphi(y) + r]$, где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а постоянные P, Q, R, p, q, r связаны равенством $(P + Q - 1)r = (p + q - 1)R$.

Для уравнения (3) $F(x, y) = f(x, y) = \chi[P\varphi(x) + Q\varphi(y)]$, $g(x, y) = \varphi^{-1}[pX(x) + qX(y)]$, где $X(t)$, $\varphi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, а постоянные P, Q, p, q связаны равенством $Pq = pQ$.

Для уравнения (4) $F(x, y) = f(x, y) = \chi[\varphi(x) + \varphi(y)]$, $g(x, y) = \varphi^{-1}[X(x) + Y(y)]$.

В конце статьи устанавливается необходимое и достаточное условие представимости строго монотонной и дифференцируемой функции $z(x, y)$ в виде $z(x, y) = Z[X(x) + Y(y)]$. Это условие заключается в функциональной зависимости четырех функций $z(x, u)$, $z(x, v)$, $z(y, u)$, $z(y, v)$, рассматриваемых как функции четырех переменных x, y, u, v.

М. А. Красносельский

1810. Теоремы о среднем для систем функций. Зингер (Teoreme de medii pentru sisteme de funcţii. Singer Ivan), Bulştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 2, 251—271 (рум.; резюме русс., франц.)

Пусть функции

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \quad (1)$$

непрерывны на сегменте $[a, b]$ и образуют на нем систему Чебышева (Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М. — Л., 1947, 85). Тогда для функции $f(x)$ и узлов $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ на $[a, b]$ существует единственный интерполяционный полином Лагранжа относительно системы (1):

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x).$$

Коэффициент a_n называется обобщенной разделенной разностью функции $f(x)$ в точках x_i относительно системы (1) и обозначается так:

$$\left\{\begin{matrix}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\end{matrix}; f\right\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f\}.$$

Доказываются следующие две основные теоремы:

1. Если система (1) есть система Маркова (см. цитированную книгу, стр. 94) и если $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_{n+1}]$, то существует точка $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ такая, что в любой ее окрестности можно найти точки $x_1' < x_2' < \cdots < x_{n+1}'$, так что $\xi \in (x_1', x_{n+1}')$ и

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, f\} = \{x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}', f\}.$$

2. Пусть функции $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \ldots, \varphi_n'(x)$ образуют систему Чебышева на $[a, b]$ (они не предполагаются непрерывными) и пусть $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_{n+1}]$ и дифференцируема на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда существуют точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ такие, что $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ и

$$\left\{\begin{matrix}1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\end{matrix}; f\right\} = \left\{\begin{matrix}\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n' \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\end{matrix}; f'\right\}.$$

В качестве следствий получен ряд ранее известных теорем о среднем. *А. А. Конюшков*

1811 К. Курс высшей математики. Т. I. Смирнов В. И. (Для физ.-матем. фак. гос. ун-тов и втузов с расширенной программой), изд. 15-е, 472 стр., М., Гостехиздат, 1954, 13 р. 20 к.

См. РЖМат, 1954, 1699 К.

1812 К. Элементарный курс высшей математики. Т. II. Разложения в ряды. Комплексные числа. Дифференциальное исчисление и приложения. Кине, Бартелеми (Cours élémentaire de mathématiques supérieures. T. II. Développements en série. Calcul des imaginaires. Calcul différentiel et applications. Quinet J., Barthélémy R., X + 222 pp., 40 fig., Paris, Dunod, 1954, 780 F.), Bibliogr. sci. et ind., 1954, 52, № 440, 8 (библ.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1813. Мультипликативные формулы для полиномов Бернулли и Эйлера. Карлиц (The multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials. Carlitz L.), Math. Mag., 1953, 27, № 2, 59—64 (англ.)

Рассматривается функциональное уравнение

$$\sum_{r=1}^{k} \alpha_{kr} f_m(t + \beta_{kr}) = \lambda_k^{-m} f_m(\lambda_k t), \quad (1)$$

где $k > 1$, λ_k, α_{kr}, β_{kr} — заданные числа, причем $|\lambda_k| \neq 0, 1$ и $\alpha_{k1} + \alpha_{k2} + \cdots + \alpha_{kk} = 1$.

Решение $f_m(t)$ этого уравнения ищется в виде полинома m-й степени со старшим коэффициентом 1. Такое решение существует, единственно и $f_m'(t) = mf_{m-1}(t)$. Кроме того, существует последовательность чисел $\{A_m\}$ такая, что формально составленный ряд $\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (x^m / m!) A_m$, будучи умноженным на e^{xt}, дает производящую функцию для последовательности $\{f_m(t)\}$, т. е.

$$e^{xt}\Phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f_m(t).$$

В частности, параметры уравнения (1) можно подобрать так, чтобы получить полиномы Бернулли $B_m(t)$, а также полиномы Эйлера $E_m(t)$, обычно вводимые соотношениями

$$\frac{xe^{xt}}{e^x-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}B_m(t),\quad \frac{2e^{xt}}{e^x+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}E_m(t).$$

Основной результат таков:

Пусть $\{f_m(t)\}$ определены уравнением (1), а $\{g_m(t)\}$ определены аналогичным уравнением:

$$\sum_{s=1}^{h}\alpha'_{hs}g_m(t+\beta'_{hs})=\lambda_h'^{-m}g_m(\lambda'_h t)$$

и соответствующая $\{g_m(t)\}$ производящая функция есть $e^{xt}\Psi(x)$. Определим $\{h_m(t)\}$ из соотношения

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}h_m(t)=e^{xt}\Phi(x)\Psi(x).$$

Тогда, если $\lambda_k=\lambda'_h=\lambda$, то имеет место формула

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}\alpha_{kr}\alpha'_{hs}h_m(t+\beta_{kr}+\beta'_{hs})=\lambda^{-m}h_m(\lambda t).$$

Г. И. Натансон

1814. Преобразование шаровых функций при переносе системы координат. Сато (Transformation of spherical solid harmonics related to the translation of coordinates system. Satô Yasuo), Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo, 1953, **31**, 203—210 (англ.; резюме япон.)

Автор получает формулы преобразования для шаровых функций, когда начало сферической полярной системы координат сдвигается на величину a вдоль полярной оси. Если R, θ, φ и R', θ', φ' суть эти две системы ($\varphi=\varphi'$), то формула преобразования для внутренних сферических функций такова:

$$R'^n P_n^m(\cos\theta')_{\sin}^{\cos}m\varphi'=$$

$$=\sum_{k=m}^{n}\binom{n+m}{k+m}(-a)^{n-k}R^kP_k^m(\cos\theta)_{\sin}^{\cos}m\varphi.$$

Аналогичное преобразование существует для внешних сферических функций

$$R^{-n-1}P_n^m(\cos\theta)_{\sin}^{\cos}m\varphi,$$

но только в этом случае мы имеем бесконечный ряд и нужно различать случаи $R<a$ и $R>a$. *A. Erdélyi.*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 221.

1815. Об одном новом интегральном представлении функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$ положительного порядка n при $-1<x<1$. Казнав (Sur une nouvelle expression intégrale de la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif pour $-1<x<+1$. Cazenave René), Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys., 1953, **17**, cep. 4, 139—141 (франц.)

Известно представление Гобсона функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$ произвольного положительного порядка n:

$$2Q_n(\cos\theta)=\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}\psi)^{n+1}},\qquad(1)$$

где $x=\cos\theta$, $0<\theta<\pi$. Полагая $\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}\psi=\rho\exp i\varphi$, автор приводит (1) к виду

$$Q_n(\cos\theta)=\int_0^{\infty}\rho^{-n-1}\cos(n+1)\varphi d\psi.\qquad(2)$$

При $\theta=\pi/2$ из формулы (2) следует

$$Q_n(0)=$$

$$=\cos\left\{\frac{(n+1)\pi}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\}\Big/2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right).$$

При $\theta\neq\pi/2$ из (2) автор получает следующую формулу:

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\cos^n\theta}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^n\varphi\cos(n+1)\varphi}{\sqrt{\cos2\theta-\cos2\varphi}}d\varphi,\qquad(3)$$

где $\varepsilon=\operatorname{sgn}[(\pi-2\theta)/2]$.

Интегральное представление (3) функции Лежандра второго рода аналогично известному выражению функции Лежандра первого рода через интеграл Мелера — Дирихле.

Указывается, что из формулы (3) непосредственно следуют классические выражения функций Лежандра второго рода целочисленного положительного порядка. *Б. Р. Левин*

1816. Присоединенные функции Лежандра. Пауэр (The associated Legendre polynomial. Power G.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 115—116 (англ.)

Приведены 15 соотношений между присоединенными функциями Лежандра, которые могут оказаться полезными при вычислениях со сферическими функциями.

Часть этих соотношений была известна ранее. Например, равенство $(2n+3)\mu P_{n+1}^s=(n+s+1)P_n^s+(n-s+2)P_{n+2}^s$ можно найти в п. 66 гл. III, стр. 109 книги Гобсона «Теория сферических и эллипсоидальных функций» (Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952); хорошо известным является также значение интеграла $\int_{-1}^{+1}P_n^sP_m^s\,d\mu$. *В. И. Крылов*

1817. О рекуррентных формулах для бесселевых функций. Янкович (On recurrence formulae for Bessel functions. Janković Zlatko), Glasnik. mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 3, 161—167 (англ.; резюме хорв.)

Дается элементарный вывод рекуррентных формул для функций Бесселя, основанный на методе, примененном ранее автором при изучении функций Эрмита и Лагерра (РЖМат, 1954, 5557). *Н. Н. Лебедев*

1818. Заметка о втором решении уравнения Эрмита. Мукхерджи (A note on the second solution of Hermite's equation. Mukherjee B. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1952, **44**, № 3, 124—126 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Исследуется второе решение $\overline{H}_n(z)$ уравнения Эрмита

$$u''(z) - 2z\,u'(z) + 2n\,u(z) = 0,$$

линейно независимое от его первого решения — полиномов Эрмита $H_n(z)$. Это второе решение было получено Мерсманом (Mersman A., J. Math. and Phys., 1950, 29, 191—197) в виде

$$\overline{H}_n(z) = H_n(z)\int \exp(z^2)\,dz + G_n(z)\exp(z^2),$$

где

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^{k+1}\frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}(2z)^{n-2k-1}.$$

Доказываются следующие свойства функций $\overline{H}_n(z)$ и $G_n(z)$: 1. Функция $G_n(z)$ выражается через полиномы Эрмита

$$G_n(z) = -H_{n-1} + 2(n-2)H_{n-3} - \qquad (1)$$

$$-2^2(n-3)(n-4)H_{n-5} + \cdots + (-1)^r 2^{r-1}\times$$

$$\times(n-r)(n-r-1)\ldots(n-2r+2)H_{n-2r+1} + \cdots,$$

причем последний член в (1) равен $(-1)^{(n+1)/2}\times$ $\times(n-1)(n-3)\ldots 2H_0$ при n нечетном, и $(-1)^{n/2}\times$ $\times n(n-2)\ldots 4H_1$ при n четном.

Разложение (1) аналогично выражению через полиномы Лежандра функции $w_{n-1}(z)$ (Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М.— Л., 1951, 402), которая входит во второе решение уравнения Лежандра.

2. Функции $\overline{H}_n(z)$ и $G_n(z)$ удовлетворяют такому же рекуррентному соотношению, как и полиномы Эрмита

$$f_{n+1}(z) - 2zf_n(z) + 2nf_{n-1}(z) = 0. \qquad (2)$$

3. Имеют место формулы

$$H_n(z) = -G_{n+1}(z) - G_n'(z),$$

$$H_n(z)\,G_{n-1}(z) - G_n(z)\,H_{n-1}(z) = 2^{n-1}(n-1)!$$

$$H_n(z)\,H_{n-1}(z) - \overline{H}_n(z)\,H_{n-1}(z) = 2^{n-1}(n-1)!\,e^{z^2},$$

$$H_{n+1}(z)\,G_{n-1}(z) - G_{n+1}(z)\,H_{n-1}(z) = 2^n(n-1)!\,z,$$

$$H_{n+1}(z)\,\overline{H}_{n-1}(z) - \overline{H}_{n+1}(z)\,H_{n-1}(z) = 2^n(n-1)!ze^{z^2},$$

$$G_n(z) = -H_n(z)\sum_{r=1}^{n}2^{r-1}(r-1)!\,/\,H_{r-1}(z)\,H_r(z).$$

При действительных значениях z справедливо неравенство

$$G_n^2(z) - G_{n-1}(z)\,G_{n+1}(z) > 0.$$

Б. Р. Левин

1819. О полиномах Бесселя. Агарвал (On Bessel polynomials. Agarwal R. P.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 410—415 (англ.)

Излагается новый способ построения теории полиномов Бесселя. Автор исходит из того, что полиномы Бесселя являются предельным случаем классических полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, а именно

$$y_n(x,a,b) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+n)}P_n^{(\varepsilon-1,\,a-\varepsilon-1)}\left(1+\frac{2\varepsilon x}{b}\right). \qquad (1)$$

С помощью формулы (1) автор выводит дифференциальное уравнение для полиномов Бесселя, дифференциальную формулу

$$y_n(x,a,b) = b^{-n}x^{2-a}e^{b/x}\left(x^{2n+a-2}e^{-b/x}\right)^{(n)},$$

а также четыре рекуррентных формулы и получает производящую функцию полиномов Бесселя; пользуясь формулой для суммы корней полинома Якоби, автор вычисляет сумму корней ξ_ν полинома $y_n(x,a,b)$ $\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu = -b/2$. Далее выводится теорема сложения для полиномов Бесселя относительно параметров a и b. Большая часть этих результатов была получена до Агарвала Кроллом и Фринком (Krall H. L., Frink O., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 65, 100—115), а также Бэрчнолом (Burchnall J. L., Canad J. Math., 1951, 3, 62—68). Однако метод Агарвала значительно упрощает выводы.

В конце статьи автор выводит соотношение

$$y_n(x,a,b) = e^{-\frac{bx}{2}}(b/x)^{1-\frac{a}{2}}W_{1-\frac{a}{2},\,\frac{a-1}{2}+n}(b/x)$$

между полиномами Бесселя и функциями Уиттекера, из которого он получает интегральную формулу

$$y_n(x,a,b) = \frac{1}{\Gamma(a+n-1)}\int_0^\infty t^{a-2+n}\left(1+\frac{tx}{b}\right)^n e^{-t}dt, \qquad (2)$$

где $\mathrm{Re}\,(a+n-1)\geqslant 0$. Выражение (2) можно получить непосредственно и притом не только при целых положительных, но и при любых значениях n.

Ю. Л. Рабинович

1820. О символическом исчислении с n переменными и о гипербесселевых функциях. Делерю (Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesséliennes. Delerue P.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, 67, сер. 1, № 2, 83—104 (франц.)

Вводится кратное преобразование Лапласа—Карсона

$$\varphi(p_1,\ldots,p_n) =$$

$$= P\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-Q}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \subset f(x_1,\ldots,x_n),$$

где $P = p_1\ldots p_n$, $Q = \sum_{i=1}^{n}p_ix_i$; развиваются методы нахождения конкретных операционных соотношений с n переменными и даются их приложения к решению некоторых интегральных уравнений и к теории специальных функций.

Сначала формулируются обобщения на случай n переменных элементарных теорем: подобия, смещения, запаздывания, Бореля и некоторых других, из которых выводится ряд следствий, в частности, соотношения:

$$\frac{f\left(\sum_1^n p_i^{-1}\right)}{\prod_1^n p_i^{\alpha_i}\left(\sum_1^n p_i^{-1}\right)} \subset \prod_1^n x_i^{\alpha_i}\int_0^\infty \frac{\prod_1^n J_{\alpha_i}(2\sqrt{sx_i})}{s^{\left(\sum_1^n\alpha_i\right)/2}}h(s)\,ds, \qquad (1)$$

где $f(p) \underset{1}{\subset} h(s)$ и $\alpha_i\,(i=1,\ldots,n)$ — натуральные числа,

$$p_1^{1-\alpha_1}\ldots p_n^{1-\alpha_n} f(p_1^{-1},\ldots,p_n^{-1}) \subset \tag{2}$$

$$\subset \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty R \prod_{i=1}^n J_{\alpha_i}(2\sqrt{s_i x_i})\, h(s_1,\ldots,s_n) ds_1 \ldots ds_n,$$

где $f(p_1,\ldots,p_n) \underset{n}{\subset} h(s_1,\ldots,s_n)$, $R = \prod_1^n (x_i/s_i)^{\alpha_i/2}$ и

$$\prod_1^n x_i^{\alpha_i-1} h\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right) \underset{n}{\supset} \prod_1^n p_i^{(2-\alpha_i)/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_1^n J_{\alpha_i}(2\sqrt{s_i p_i})\, s_i^{\frac{\alpha_i-2}{2}}\, f(s_1,\ldots,s_n) ds_1 \ldots ds_n. \tag{3}$$

Дается ряд приложений формулы (1) при $n=2$ и 3, $h(s)=1$ и $h(s)=s^\alpha$, при выводе которых используются формулы Совина и Вебера. Так, при $n=3$ и $h(s)=s^\alpha$ из (1) следует, что

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma((2\alpha+1)/2)\sqrt{\pi}}{(p_1p_2p_3)\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)^{\alpha+1}} \begin{cases} \underset{3}{\subset} 4^{\alpha-1}\Delta^{2\alpha-1}, \text{ если } \sqrt{x_1},\ \sqrt{x_2},\ \sqrt{x_3} \text{ являются сторонами треугольника площади } \Delta, \\ \underset{3}{\subset} 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Помимо приведенных операционных соотношений, которые позволяют находить изображения ряда конкретных оригиналов нескольких аргументов, указываются еще дальнейшие формулы, которые могут служить для той же цели. Даются примеры приложений этих формул (большинство которых при $n=2$ известно). Повидимому, новыми являются соотношения:

$$x_1^{\frac{n-k}{2}} x_2^{\frac{n-k}{2}} J_{n+k}(2\sqrt{x_1x_2}) \underset{2}{\supset}$$

$$\underset{2}{\supset} \Gamma(n+1)\, p_2\, p_1^{1-k}(p_1p_2+1)^{-n-1},$$

$$\cos x_1x_2 \underset{2}{\supset} p_1p_2[\sin p_1p_2\ \mathrm{ci}\ p_1p_2 - \cos p_1p_2\ \mathrm{si}\ p_1p_2],$$

$$(\cos 2\sqrt{x_1x_2})/\sqrt{x_1x_2} \underset{2}{\supset} \pi p_1p_2/\sqrt{p_1p_2+1},$$

$$I_0(2\sqrt{x_1x_2})\, J_0(2\sqrt{x_1x_2}) \underset{2}{\supset} p_1p_2/\sqrt{p_1^2p_2^2+4}$$

и т. д., вытекающие из формулы: $x_2^{-k}\sigma(x_1x_2) \underset{2}{\supset} \underset{2}{\supset} p_1^{-k} h(p_1p_2)$, где $F(x) \underset{1}{\supset} h(1/p)$ и $p^{-k}F(1/p) \underset{1}{\subset} \sigma(x)$.

Во второй части работы сначала дается операторное решение интегрального уравнения типа Вольтерра

$$\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n} K(x_1-\lambda_1,\ldots,x_n-\lambda_n) f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) d\lambda_1\ldots d\lambda_n +$$

$$+ Cf(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n), \tag{4}$$

именно:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \underset{n}{\supset} \varphi(p_1,\ldots,p_n) = \frac{\theta(p_1,\ldots,p_n)}{C + \dfrac{\Psi(p_1,\ldots,p_n)}{p_1\ldots p_n}},$$

где $\theta(p_1,\ldots,p_n) \underset{n}{\subset} g(x_1,\ldots,x_n)$, $\Psi(p_1,\ldots,p_n) \underset{n}{\subset} K(x_1,\ldots,x_n)$, и обобщается на n переменных теорема Пародди о представлении решения уравнения (4) через решение $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ уравнения (4) при $g=1$:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n}\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n} f_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \times$$

$$\times g(x_1-\lambda_1,\ldots,x_n-\lambda^n)\, d\lambda_1\ldots d\lambda_n.$$

(Эта формула является по существу формулой Дюзмеля). Эти факты применяются для решения обобщенного уравнения Абеля:

$$\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n} \frac{f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}{\prod_1^n (x_i-\lambda_i)^{\mu_i}} d\lambda_1\ldots d\lambda_n = g(x_1,\ldots,x_n)$$

$$(0<\mu_i<1, \quad i=1,\ldots,n),$$

которое имеет вид:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \pi^{-n}\prod_1^n \sin\mu_i\pi \times$$

$$\times \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n}\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n}\prod_1^n (x_i-\lambda_i)^{\mu_i-1} \times$$

$$\times g(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\, d\lambda_1\ldots d\,\lambda_n.$$

Далее рассматриваются функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(x_1,\ldots,x_n)$ (называемые сопряженными функциями порядков $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ в смысле обобщенного преобразования Ганкеля), для которых из соотношения

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \prod_1^n \left(\frac{x_i}{s_i}\right)^{\alpha_i/2} \prod_1^n J_{\alpha_i}(2\sqrt{s_ix_i}) \times$$

$$\times g(s_1,\ldots,s_n)\, ds_1\ldots ds_n$$

вытекает соотношение

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \prod_1^n \left(\frac{x_i}{s_i}\right)^{\alpha_i/2} J_{\alpha_i}(2\sqrt{s_ix_i}) \times$$

$$\times f(s_1,\ldots,s_n)\, ds_1\ldots ds_n.$$

Изображения таких функций $\varphi(p_1,\ldots,p_n) \underset{n}{\subset} f(x_1,\ldots,x_n)$ и $\theta(p_1,\ldots,p_n) \underset{n}{\subset} g(x_1,\ldots,x_n)$ в силу формулы (2) связаны соотношениями:

$$\varphi(p_1,\ldots,p_n) = \left(\prod_1^n p_i^{1-\alpha i}\right)\theta(1/p_1,\ldots\ 1/p_n),$$

$$\theta(p_1,\ldots,p_n) = \left(\prod_1^n p_i^{1-\alpha i}\right)\varphi(p_1,\ldots,p_n),$$

из которых вытекает общий вид изображения самосопряженной функции порядков $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\varphi(p_1,\ldots,p_n)=\left(\prod_1^n p_i^{1-\alpha_i}\right)F(p_1,\ldots,p_n)+F\left(\frac{1}{p_1},\ldots,\frac{1}{p_n}\right),$$

где F — произвольная функция. Из формулы (3) аналогично выводится общий вид оригинала самосопряженного изображения. Приводятся примеры самосопряженных функций двух переменных порядков 1,1 (в конце работы приводится таблица таких функций и для других порядков). Статья заканчивается замечанием о полиномах Абеля—Лэгерра и Эрмита от n переменных. *В. И. Левин*

1821. О символическом исчислении с n переменными и о гипербесселевых функциях. Часть вторая. Гипербесселевы функции. Делрю (Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes. Deuxième partie. Fonctions hyperbesséliennes. Delerue P.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, 67, сер. 1, № 3, 229—274 (франц.)

Часть первую см. реф. 1820. Обобщая определение Эмбера (Humbert P., Atti dell. Pont. Accad. delle Scienze Nuovi Lincei, 1930, Anno 83, fasc. III), автор вводит функции

$$J^{(n)}_{\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n}(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(x/(n+1))^{k(n+1)+\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}{\Gamma(\lambda_1+k+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+k+1)\,k!}$$

и

$$I^{(n)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/(n+1))^{k(n-1)+\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}{\Gamma(\lambda_1+k+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+k+1)\,k!},$$

которые он называет гипербесселевыми порядка n с индексами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, отличными от целых отрицательных чисел (если один из индексов равен целому отрицательному числу, то гипербесселева функция определяется через соответствующую функцию с положительным индексом). Функции ber и bei определяются равенством

$$\mathrm{ber}^{(n)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)+i\,\mathrm{bei}^{(n)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)=$$
$$=i^{-\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}{n+1}}I^{(n)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\left[xi^{\frac{1}{n+1}}\right],$$

не сводящимся при $n=1$ к обычному определению этих функций (из-за множителя $i^{\lambda_1/2}$ в левой части). Приводятся операционные соотношения для этих функций, например,

$$x^{\frac{n\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n}{n+1}}J^{(n)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\left[(n+1)\,x^{-\frac{1}{n+1}}\right]\supset$$
$$\supset p^{\frac{\lambda_2+\ldots+\lambda_n-n\lambda_1}{n}}J^{(n-1)}_{\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n}\left[np^{-\frac{1}{n}}\right].$$

а также аналогичные соотношения для гипербесселевых функций n переменных. Далее устанавливаются некоторые рекуррентные формулы и разложения в ряды по гипербесселевым функциям, обобщающие известные формулы теории бесселевых функций. Подробно рассматриваются гипербесселевы функции, обобщающие бесселевы функции порядка, равного целому числу $+1/2$, именно

$$x^{n/2}J^{(n)}_{\frac{1}{n-1},\ldots,\ \frac{n-k}{n-1},\ \frac{-k}{n-1},\ldots,\ \frac{-1}{n-1}}(x)=$$
$$=(n+1)^{(n+1)/2}(2\pi)^{-n/2}f^{(n+1)}_{k+1}(x),$$

где $f^{(n+1)}_{k+1}(x)$ — оригинал изображения $p^{k+1}/(p^{n+1}+1)$, $k=0, 1, \ldots, n$. Они заменяют тригонометрические функции в интегральных представлениях гипербесселевых функций.

Некоторые общие операционные соотношения, в которых фигурируют бесселевы функции, обобщаются так, что в них роль бесселевых функций играют гипербесселевы функции: так, если $f(x)\supset$ $\supset\varphi(p)$, то для любого положительного k

$$p^{n(1-k)}\varphi(p^{-n})\subset(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n(n-1)-2kn}{2(n+1)}}\cdot n^{-\frac{n^2-2kn-1}{2(n+1)}}\times$$
$$\times\int_0^{\infty}SJ^{(n)}_{k,\,k-\frac{1}{n},\ldots,\,k-\frac{n-1}{n}}\left[(n+1)\left(\frac{sx^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]f(s)\,ds,$$

где $S=s^{(n-2kn-1)/2(n+1)}$.

Эта формула и ей аналогичные распространяются и на операционное исчисление с n переменными.

В заключение рассматриваются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют гипербесселевы функции — обобщения уравнения Бесселя — и устанавливается, что $n+1$ функция

$$J^{(n)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x),\ J^{(n)}_{-\lambda_1,\lambda_2-\lambda_1,\ldots,\lambda_n-\lambda_1}(x),\ldots$$
$$\ldots,\ J^{(n)}_{-\lambda_n,\lambda_1-\lambda_n,\ldots,\lambda_{n-1}-\lambda_n}(x)$$

составляют фундаментальную систему решений уравнения для $J^{(n)}$, если индексы нецелые и никакие два из них не отличаются на целое. Показывается, что решениями уравнения $y^{(n)}\pm x^q y=0$ являются функции

$$x^{\frac{n-1}{2}}J^{(n)}_{\frac{1}{n+q},\ldots,\ \frac{n-k-1}{n+q},\ \frac{-k}{n+q},\ldots,\ \frac{-1}{n+q}}\left(\frac{n}{n+q}\,x^{\frac{n+q}{n}}\right),$$
$$(k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Приводятся аналоги интегралов Сонина и Вебера для гипербесселевых функций.

При выводе всех формул широко применяется аппарат операционного исчисления, в частности, развитый в первой части статьи. *В. И. Левин*

1822. К теории обращения гипергеометрического ряда. Диковская Э. И., Тр. Среднеаз. ун-та, 1953, № 36, 35—40

Обычным приемом, использующим формулу Лагранжа, записывается обращение гипергеометрического ряда. Приводятся примеры, иллюстрирующие известную оценку для радиуса сходимости обращенного ряда. Новых результатов статья не содержит. *М. Н. Олевский*

1823. Представления вырожденных гипергеометрических функций через функции Бесселя.

Халл, Суонсон, Трамплер (Bessel expansions of the confluent hypergeometric functions. Hull T. E., Swanson C. A., Trumpler D. A.), Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. 3, 1953, 47, June, 7—16 (англ.)

Приводится известный результат Лиувилля о связи между дифференциальным уравнением

$$(p(z)y'(z))' + q(z)y = r(z)y \qquad (1)$$

и эквивалентным ему интегральным уравнением

$$y(z) = av_1(z) + bv_2(z) + c\int_{\varepsilon}^{z}\{v_1(x)v_2(z) - v_1(z)v_2(x)\}r(x)y(x)\,dx, \qquad (2)$$

где через v_1 и v_2 обозначены два линейно независимых решения уравнения (1) без правой части, а $c = 1/p(x)\{v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)\}$.

Положив в уравнении (1) $p(z)=z$, $q(z) = (z^2-\nu^2)/z$, $r(z) = (1-\alpha^2)z$, где ν не равно целому числу, получаем уравнение, которому удовлетворяют функции $J_{\pm\nu}(\alpha z)$.

Взяв в этом случае $v_1(z) = J_\nu(z)$, $v_2(z) = J_{-\nu}(z)$ и решая соответствующее интегральное уравнение (2) методом последовательных приближений, авторы получают теорему умножения бесселевых функций:

$$J_\nu(\alpha z) = \alpha^\nu \sum_{i=0}^{\infty}[(1-\alpha^2)^i/i!](z/2)^i J_{\nu+i}(z),$$
$$Y_\nu(\alpha z) = \alpha^\nu \sum_{i=0}^{\infty}[(1-\alpha^2)^i/i!](z/2)^i Y_{\nu+i}(z). \qquad (3)$$

Функция Уиттекера $M_{k,\pm m}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$W'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{y} + \frac{1-4m^2}{4y^2}\right)W = 0,$$

которое с помощью подстановок $4ky = z^2$, $W(y) = zF(z)$, $2m = \nu$ приводится к виду (1):

$$(zF)' + (z - \nu^2 z^{-1})F = (z/4k)^2 F.$$

Положив в интегральном уравнении (2) $v_1 = J_\nu(z)$, $v_2 = J_{-\nu}(z)$, авторы получают решение этого уравнения в виде ряда, расположенного по функциям $J_\nu(\alpha z)$.

Отсюда в силу (3) вытекает искомое разложение вырожденной гипергеометрической функции по функциям Бесселя:

$$M_{k,m}(y) = \frac{\Gamma(2m+1)}{2k^{(2m+1)/2}}\sum_{i=0}^{\infty}\overline{p}_i(2\sqrt{ky})^{i+1}J_{2m+i}(2\sqrt{ky}),$$

где

$$\overline{p}_1 = 0; \quad \overline{p}_2 = \frac{\nu+1}{32k^2};$$
$$\overline{p}_3 = \frac{1}{32k^2}\left\{2\frac{\nu+i+2}{i+3}\overline{p}_{i+1} - \frac{\overline{p}_i}{i+3}\right\}.$$

Н. С. Кошляков

1824. О гипергеометрических функциях. Нёрлунд (Sur les fonctions hypergéométriques. Nörlund Niels Erik), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 22, 1371—1373 (франц.)

Автор рассматривает дифференциальное уравнение

$$(\vartheta-\gamma_1)\ldots(\vartheta-\gamma_n)y - z(\vartheta+\alpha_1)\ldots$$
$$\ldots(\vartheta+\alpha_n)y = 0, \quad \vartheta \equiv z\frac{d}{dz}, \qquad (1)$$

в предположении, что ни одна из разностей $\gamma_i - \gamma_j$, $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ не есть целое число или нуль, т. е., когда уравнение (1) имеет n линейно независимых решений y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, представимых при $|z|<1$ в форме обобщенных гипергеометрических рядов

$$y_i = z^{\gamma_i}\sum_{\nu=0}^{\infty}z^\nu\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_s+\gamma_i+\nu)}{\Gamma(\gamma_i-\gamma_s+\nu+1)}. \qquad (2)$$

В окрестности особой точки $z = 1$ уравнение (1) допускает, вообще говоря, одно неголоморфное решение и $n-1$ голоморфных решений. Для последних автор указывает представления в виде рядов по обобщенным гипергеометрическим многочленам, сходящихся при $|z-1|<1$. Так, ряд

$$y_{ij} = Cz^{\gamma_i}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+\gamma_i)_\nu(\alpha_2+\gamma_i)_\nu}{\nu!\,(\alpha_1+\alpha_2+\gamma_i+\gamma_j)_\nu}\varphi_\nu(z), \qquad (3)$$

где $(\alpha)_\nu = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)$, $\varphi_\nu(z) \equiv$

$$\equiv {}_{n-1}F_{n-2}\left(\begin{matrix}-\nu, \alpha_3+\gamma_i, \alpha_4+\gamma_i, \ldots, \alpha_n+\gamma_i \\ \gamma_i-\gamma_3+1, \gamma_i-\gamma_4+1, \ldots, \gamma_i-\gamma_n+1\end{matrix}\middle| z\right),$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$ (C — постоянная), сходящийся при $|z-1|<1$, если $\mathrm{Re}(\alpha_s+\gamma_i)>0$, $s = 3, 4, \ldots, n$, представляет собой решение уравнения (1) в указанном круге.

Приводятся два других представления y_{ij} в виде рядов по обобщенным гипергеометрическим многочленам ${}_nF_{n-1}$ и ${}_{n+1}F_n$. Решения y_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ линейно независимы. Имеет место следующая связь между y_{ij}, y_i и y_j: $\pi(y_j - y_i) = y_{ij}\sin\pi(\gamma_i - \gamma_j)$, при этом постоянная C в (3) равна

$$C = \frac{\Gamma(\alpha_1+\gamma_j)\Gamma(\alpha_2+\gamma_j\prod_{s=1}^{n}\Gamma(\alpha_s+\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\gamma_i+\gamma_j)\prod_{s=3}^{n}\Gamma(\gamma_i-\gamma_s+1)}.$$

Ряды (2), после замены в них z на $1/z$ и одновременной взаимной замены α_s на γ_s, представляют решения $\overline{y}_i$ уравнения (1) при $|z|>1$. Осуществляя эти замены и в (3), мы получаем новое решение $\overline{y}_{ij}$ уравнения (1), голоморфное в точке $z = 1$.

Это решение также может быть представлено рядом многочленов, сходящимся в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > 1/2$. Имеет место соотношение: $\pi(\overline{y}_j - \overline{y}_i) = \overline{y}_{ij}\sin\pi(\alpha_i - \alpha_j)$. Доказательства отсутствуют.

М. Н. Олевский

1825. О гипергеометрических функциях. Нёрлунд (Sur les fonctions hypergéométriques. Nörlund Niels Erik), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 23, 1466—1468 (франц.)

Автор рассматривает уравнение (1) предыдущего реферата в предположении, что $\gamma_i - \gamma_j$ —

$-\sum_{s=1}^{n}(\alpha_s+\gamma_s)$ не есть целое число или нуль. Это уравнение допускает одно решение вида $(1-z)^{\beta}\xi(z)$, где $\xi(z)$ — голоморфная в точке $z=1$ функция и $\xi(1)=1$.

Из интегральных уравнений Меллина для функции $\xi(z)$ вытекают два интегральных представления для нее, одно — справедливое при $0<z<1$, другое — для $z>1$. Пользуясь последним, автор находит при $\mathrm{Re}(\beta)>-1$ и $\mathrm{Re}(\alpha_i+\gamma_j)>0$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, следующее представление, пригодное для $z>0$ и $z\gtrless 1$

$$(z-1)^{\beta}\xi(z)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-x}p(x)\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_s-x)}{\Gamma(1-\gamma_s-x)}\,dx, \qquad (1)$$

где

$$p(x)=1+e^{\pm\pi i\beta}\prod_{s=1}^{n}[\sin\pi(x+1-\alpha_s)/\sin\pi(x+\gamma_s)].$$

Если сделать разрез вдоль отрезка действительной оси от 0 до 1 плоскости z и принять в $p(x)$ верхний (нижний) знак, то правая часть (1) дает аналитическое продолжение функции, стоящей в левой части (1), в область $0\leqslant\arg z<2\pi$ ($0\geqslant\arg z>-2\pi$); точки $z=0$ и $z=1$ при этом исключаются. Путь интегрирования в (1) должен быть выбран так, чтобы полюсы подинтегральной функции $\alpha_s+\nu$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots$) остались справа от него, а полюсы $-\gamma_s-\nu$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots$) — слева; путь может быть искривлен, если это необходимо для обеспечения указанного условия.

Автор отмечает, что условие $\mathrm{Re}(\beta)>-1$ может быть опущено, если ограничиться областями $0<\arg z<2\pi$ и $0>\arg z>-2\pi$. *М. Н. Олевский*

1826. Новые представления вырожденной гипергеометрической функции Уиттекера. Бромберг (New representations of Whittakers confluent hypergeometric function. Bromberg J.), Rev. Unión mat. Argentina, 1953, **15**, 157—172 (англ.)

Автор выводит известное интегральное представление функции $M_{k,m}(x)$ и, разлагая подинтегральную функцию, получает разложение по модифицированным функциям Бесселя и модифицированным функциям Струве. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs. 1954, **15**, № 2, 122.

1827. Теорема сложения для функции Матье. Шефке (Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen. Schäfke Friedrich Wilhelm), Ber. Mathematiker—Tagung Berlin, 1953, 231—232 (нем.)

Дается новое выражение теоремы сложения для функций эллиптического цилиндра. В частных случаях из него получаются разложения функции Матье по цилиндрическим и показательным функциям, установленные Мейснером, все известные разложения функции Матье по цилиндрическим функциям с аргументами $2h\,\mathrm{ch}\,z$ и $2h\,\mathrm{sh}\,z$, а также ряды Зигера. *В. Д. Купрадзе*

1828. Заметка о предгармонических функциях. Аллен, Мердок (A note on preharmonic functions. Allen A. C., Murdoch B. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 842—852 (англ.)

Функция $f(m, n)$ целочисленных аргументов m и n называется предгармонической, если

$$4f(m, n)=f(m+1, n)+f(m-1, n)+$$
$$+f(m, n+1)+f(m, n-1).$$

Устанавливается ряд предложений относительно предгармонических функций, неотрицательных в полуплоскости $n\geqslant 0$. Приводим некоторые из этих предложений.

Лемма 3. Функция

$$h(m, n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos mt\,\varphi^n(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ есть меньший из корней уравнения $\varphi(t)+\varphi^{-1}(t)+2\cos t=4$, предгармоническая и обладает следующими свойствами: a) $h(0, 0)=1$; b) $h(m, 0)=0$, $m\neq 0$; c) $h(m, n)>0$, $n>0$; d) $|h(m, n)-n/\pi(m^2+n^2)|<A/n(m^2+n^2)$, $A=\mathrm{const}>0$ для всех m и для положительных n.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(m, n)$ была неотрицательной и предгармонической при $n\geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы числа $f(m, 0)$ $\{m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ были неотрицательны, чтобы ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{f(m, 0)}{1+m^2}$$

сходился и чтобы имело место представление

$$f(m, n)=Dn+\sum_{r=-\infty}^{+\infty}f(r, 0)\,h(m-r, n),$$

где D — некоторое неотрицательное число.

Теорема 4. Если функция $f(m, n)$ — предгармоническая и неотрицательная в полуплоскости $n\geqslant 0$ и для некоторого конечного $\bar{n}$ существует предел $\lim_{m\to\infty} f(m, \bar{n})=\alpha$, то для любого неотрицательного n существует предел $\alpha_n=\lim_{m\to\infty} f(m, n)$ и α_n есть линейная функция от n. *С. Г. Михлин*

1829 К. Специальные функции и их приложения. Лебедев Н. Н. 380 стр., М., Гостехиздат, 1953, 12 р.

Книга содержит изложение основных вопросов теории гамма-функции, интеграла вероятности и связанных с ним функций, интегральной показательной функции и родственных ей функций, ортогональных полиномов, цилиндрических функций, сферических функций, гипергеометрических функций и функций параболического цилиндра. Материал разбит на десять глав, из которых две посвящены приложениям цилиндрических и сферических функций к задачам математической физики. Восемь глав, излагающих собственно теорию специальных функций, снабжены упражнениями, в которых в качестве примеров приведены некоторые дополнительные свойства рассматриваемых функций, а также обзор и характеристики существующих таблиц. Книга рассчитана на научных работников в области

технических дисциплин и инженеров-исследователей, и не предполагает у читателя знаний, далеко выходящих за пределы курса математики, читаемого в высших технических учебных заведениях, если не считать элементов теории функций комплексного переменного и математической физики. Книга весьма содержательна, но изложение сжато и может вызвать у математически неискушенного читателя серьезные затруднения.

За немногочисленными исключениями автор не рассматривает задач, приводящих к необходимости введения тех или иных специальных функций, считая, что читатель уже встретился с этой необходимостью в своей практической деятельности, и начинает изучение функций с какого-либо их формального определения. *В. И. Левин*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1830. Заметка об обобщенном условии Жордана для преобразований Фурье и Меллина. Сюй Ли-чжи (富理,梅林變換的廣義約當條件. 徐利治), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 2, 142—147 (кит.;резюме англ.)

Пользуясь понятием вариации функции на произвольном множестве (Сакс С., Теория интеграла, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, 318), автор следующим образом обобщает теорему обращения для преобразования Меллина:

Пусть $t^{\gamma-1}f(t) \in L(0, \infty)$ и $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на множествах E и $I \setminus E$, где E — некоторое измеримое множество интервала $I \subset (0, \infty)$, и пусть

$$\Delta(x, t) = [\text{mes}\,(E \cdot [x, t])] / |x - t|.$$

Тогда для каждой точки плотности $x \in E$, являющейся двусторонней предельной точкой относительно E, в некоторой окрестности которой $\Delta(x, t)$ имеет ограниченную вариацию, преобразование Меллина

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt \qquad (s = \gamma + iw)$$

допускает обращение

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\gamma - i\lambda}^{\gamma + i\lambda} F(s)\, x^{-s}\, ds,$$

где $f(x+0)$ и $f(x-0)$ берутся при $t \to x$ на множестве E.

Доказательство основывается на аналогичном обобщении для преобразования Фурье и использует предыдущие результаты автора (Hsu L. C., Sci. Record, 1951, **4**, 93—100). *А. А. Конюшков*

1831. Применение преобразований Фурье в физических проблемах. Уотсон (The application of Fourier transforms in physical problems. Watson W. H.), Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. 3, 1953, **47**, June 37—46 (англ.)

Обзор различных применений преобразования Фурье в задачах математической физики. Особое внимание уделяется расходящимся интегралам и теории распределений Шварца.

Рассматривается несколько примеров из квантовой механики. *Б. М. Левитан*

1832. Обращение преобразования типа свертки дифференциальным оператором. Фокс (The inversion of convolution transforms by differential operators. Fox Charles), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 880—887 (англ.)

Пусть

$$f(x) = \int_0^\infty K(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

где

$$K(x, t) = \int_0^\infty [h(x\tau)\, h(\tau t)] \Big/ \prod_{n=1}^\infty (1 + \tau^2 a_n^{-2})]\, d\tau.$$

$h(x)$ есть ядро обобщенного преобразования Фурье. Пусть $L(x, D)$ — функция двух переменных такая, что $y = h(ux)$ является решением дифференциального уравнения $L(x, D)\, y = -u^2 y$, где D означает операцию дифференцирования по x, а u — параметр. Тогда интеграл (1) обращается дифференциальным оператором

$$\prod_{n=1}^\infty \{1 - L(x, D)\, a_n^{-2}\}\, f(x) = [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)] / 2.$$

Предполагается, что 1) a_n вещественны и ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n^{-2}$ сходится; 2) $\varphi(x) \in L(0, \infty)$; 3) $\varphi(x)$ в окрестности точки x имеет ограниченную вариацию.

Доказательство проводится для $h(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x)$, $\nu \geqslant -1/2$.

Указывается, что при $\nu = 1/2$ аналогичный результат получен Виддером и Хиршманом (Hirschmann I. I. Jr., Widder D. V., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, 135—201). Отмечается возможность приложения доказательства к тому случаю, когда $h(x)$ имеет преобразование Меллина в виде произведения гамма-функций. *Ю. И. Черский*

1833. О некоторых формулах операционного исчисления. Бос (On certain formulae in operational calculus. Bose N. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, **45**, № 3, 95—100 (англ.)

Используя соотношение

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{a+t}\, dt = \int_0^\infty e^{-ax}\, \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \tag{1}$$

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,$$

автор выводит некоторые формальные операционные соотношения.

В качестве примеров полученных формул даются некоторые соотношения между специальными функциями.

Часть примеров выбрана неудачно. Так формула (7) работы вызывает сомнения, ибо соответствующие $f(t)$ и $\varphi(p)$ в исходной формуле (1) дают расходящиеся интегралы, а формулы (8), (8′) и (8″) непосредственно следуют из исходной формулы пункта 3.2. *Э. Риекстыньш*

1834. Некоторые несобственные интегралы, содержащие функции Бесселя. Ратхи (Some infinite integrals involving Bessel functions

R a t h i e C. B.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, № 1, 62—69 (англ.)

Методы операционного исчисления применяются для вычисления нескольких несобственных интегралов, содержащих видоизмененные функции Бесселя 2-го рода. Пусть $\psi(p) \doteqdot f(x)$ означает, что

$$\psi(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx \quad (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

Если $f(x) \doteqdot \psi(p)$ и $p^{2-2\nu}\, e^{a/p} f(p) \doteqdot g(x)$, то

$$\psi(p) = 2pa^\nu \int_0^\infty (p+x)^{-\nu} K_{2\nu}\left[2\sqrt{a(p+x)}\right] g(x)\,dx,$$

при условии, что для малых x $g(x) = O(x^\mu)$, $\mathrm{Re}\,\mu > -1$, а для больших x $g(x)$ порядка не выше, чем

$$x^\lambda\, e^{2\sqrt{ax}}, \quad \mathrm{Re}\,(\nu - \lambda - 3/4) > 0, \quad \mathrm{Re}\, p > 0, \quad \mathrm{Re}\, a > 0.$$

Приведем в качестве примера одну из наименее громоздких формул, полученных автором:

$$K_{2m}(2\sqrt{ap}) =$$

$$= \frac{a^{\nu+m} p^{-m}}{\Gamma(2m+2\nu)} \int_0^\infty (p+x)^{-\nu} x^{2m+2\nu-1} K_{2\nu}\left[2\sqrt{a(p+x)}\right] dx,$$

где $\mathrm{Re}\,(m+\nu) > 0$, $|\arg p| < \pi$, $|\arg a| \leq \pi$, $p \neq 0$, $a \neq 0$. *М. Б. Балк*

1835. Некоторые несобственные интегралы, содержащие *E*-функции. Р а т х и (Some infinite integrals involving *E*-functions. R a t h i e C. B.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 4, 167—175 (англ.)

Введенная Мак-Робертом *E*-функция (MacRobert, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1937, 58, 1—13) связана с операционным изображением гипергеометрической функции

$$\Gamma(\delta)\, p^{1-\gamma} E(\alpha, \beta, \gamma; \delta; p) \doteqdot$$

$$\doteqdot \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\, t^{\gamma-1}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; -t).$$

В реферируемой работе выводится ряд интегральных тождеств, содержащих *E*-функцию и другие специальные функции (гипергеометрические, бесселевы, функции Уиттекера). Полученные тождества значительно обобщают некоторые результаты, известные ранее. Приведем одно из наиболее простых тождеств:

$$\Gamma(\delta)\Gamma(\lambda)\Gamma(2\nu+\lambda)\, E(\alpha, \beta, \gamma; \delta; p) =$$

$$= 2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma) p^{\lambda+\nu} \int_0^\infty t^{\lambda+\nu-1} \times$$

$$\times K_{2\nu}(2\sqrt{pt})\, {}_3F_3(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \lambda, 2\nu+\lambda; -t)\, dt,$$

где $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$; $\mathrm{Re}\,(2\nu+\lambda) > 0$; $\mathrm{Re}\, p > 0$.

Большинство из найденных соотношений получается путем непосредственного применения следующих предложений Шастри (Shastri N. A., Proc. Indian Acad. Sci, 1944, **20**, 211—223) и Хари Шенкера (Hari Shanker, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1948, **44**, 453—455): если $f(p) \doteqdot h(x)$, $p^{-2\nu} h(1/p) \doteqdot g(x)$ и $F(p) \doteqdot x^{-\nu-l+1/2}\, g(x)$, то

$$f(p) = 2p^{\nu+1} \int_0^\infty t^{-\nu} K_{2\nu}(2\sqrt{pt})\, g(t)\, dt$$

и

$$f(p) = p^{\nu-l+1/2} \int_0^\infty e^{-u/2} u^{l-1} W_{l,\nu}(u)\, F(p/u)\, du.$$

Вывод одной из формул опирается на равенство Парсеваля — Голдстейна (Goldstein S., Proc. London Math. Soc., 1932, **34**, № 2, 103—125): если $f(p) \doteqdot h(x)$ и $\varphi(p) \doteqdot g(x)$, то

$$\int_0^\infty x^{-1} f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\infty x^{-1} h(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

В. К. Иванов

1836. Об обращении преобразований Лапласа вида $h(s)/(p(s)+q(s)e^{-\tau s})$. Х а л л, В у л ф (On inverting Laplace transforms of the form $h(s)/(p(s)+q(s)e^{-\tau s})$. H u l l T. E., W o l f e W. A.), Canad. J. Phys., 1954, **32**, № 1, 72—80 (англ.)

На двух примерах (теоретико-вероятностная задача о счетчике с ограниченной разрешающей способностью и задача о теплообмене между движущейся жидкостью и неподвижной поверхностью), в которых преобразование Лапласа искомых функций имеет указанный в заглавии вид, показывается возможность разложения начальной функции в ряд, быстро сходящийся для малых τ. Такое разложение для начальной функции преобразования Лапласа $u(s) = a/s(s+a-ae^{-\tau s})$ (τ — время регистрации счетчиком одного события, a — математическое ожидание числа подлежащих регистрации случайных событий в единицу времени, $U(t)$ — математическое ожидание числа регистраций за время t) получается, например, если $u(s)$ разложить по степеням $1 - e^{-\tau s}$ и затем почленно перейти к начальным функциям:

$$U(t) = at - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} \sum_{m=0}^{[t/\tau]} \frac{(-1)^m (t-m\tau)^{k+1}}{m!\,(k-m)!}.$$

Этот процесс по существу эквивалентен (Robinson L. B., J. Appl. Phys., 1948, **19**, 237) решению интегрального уравнения

$$U(t) = at - \int_0^{\min(t,\tau)} aU(t-u)\, du$$

методом последовательных приближений. В частности, при $a\tau < 1$ из $U_n(t)$ получается асимптотическая формула, являющаяся уточнением формулы Феллера (Feller W., Courant anniversary volume. Interscience Publishers. New York, 1948, 105):

$$U(t) \sim at/(1+a\tau) + a^2\tau^2/2(1+a\tau)^2.$$

В общем случае отмечается, что если рассматриваемое преобразование Лапласа представить в виде

$$u(s) = f(s)/(1+g(s)),$$

где

$$f(s) = h(s) \prod_{k=1}^n (s-\alpha_k)^{-1},$$

$$g(s)=\left[-\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)+p(s)+q(s)e^{-\tau s}\right]\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)^{-1},$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — те корни уравнения $p(s)+q(s)e^{-\tau s}=0$, которые переходят при $\tau\to 0$ в корни уравнения $p(s)+q(s)=0$, то, разлагая $u(s)$ по степеням $g(s)$ и почленно переходя к начальным функциям, найдем быстро сходящееся при малом τ разложение $U(t)$, причем $U(t)\to F(t)$ при $\tau\to 0$, где $F(t)$ — начальная функция преобразования $f(s)$. Робинсоном в цитированной выше работе было показано, что этот процесс эквивалентен решению методом последовательных приближений интегрального уравнения

$$U(t)=F(t)-\int_0^t G(u)\,U(t-u)\,du,$$

где $G(t)$ — начальная функция преобразования $g(s)$. В том случае, когда интеграл в этом уравнении является знакопостоянной функцией t, такой подход позволяет получить как угодно тесные границы для искомой начальной функции. *В. И. Левин*

1837. Операционные методы и коэффициенты некоторых степенных рядов. Макинтайр, Вильсон (Operational methods and the coefficients of certain power series. Macintyre A. J., Wilson R.), Math. Ann., 1954, 127, № 3, 243—250 (англ.)

Основной результат: в разложении

$$\psi(z)=\exp[\gamma/(1-z)]=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad \text{при} \quad |\arg\gamma|<\pi$$

$$c_n=(\gamma/16\pi^2n^3)^{1/4}e^{\gamma/2+2\sqrt{\gamma n}}[1+O(1/\sqrt{n})],$$

а если γ отрицательно, то

$$c_n=-(|\gamma|/\pi^2n^3)^{1/4}e^{\gamma/2}[\sin(2\sqrt{|\gamma|n}-\pi/4)+O(1/\sqrt{n})].$$

Вывод основывается на том, что для $n\geqslant 1$ $c_n=F(n)$, где

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\psi(e^{-\zeta})\,e^{z\zeta}d\zeta,$$

и что $F(z)$ асимптотически равно

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\gamma/\zeta+\gamma/2+z\zeta}d\zeta=e^{\gamma/2}(\gamma/z)^{1/2}I_1(2\sqrt{\gamma z}).$$

Результат обобщается на коэффициенты в разложении $\exp[P(1/(1-z))]$, где $P(z)$ — многочлен, а также — интегрированием дробного порядка — на коэффициенты в разложениях

$$(1-z)^{-\alpha}\exp(\gamma/(1-z)) \text{ и}$$
$$\{-\lg(1-z)\}^k(1-z)^{-\alpha}\exp(\gamma/(1-z)).$$

В. И. Левин

1838. Приложения операционного исчисления с двумя переменными к вычислению определенных интегралов. Дельрю (Sur l'application du calcul symbolique à deux variables au calcul d'intégrales simples. Delerue Paul), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 17, 1686—1688 (франц.)

Примеры приложений соотношения

$$\frac{f(p,p)}{p}\subset\int_0^x F(x-s,s)\,ds, \text{ где } f(p,q)\Subset F(x,y),$$

из которого можно вывести значения многих определенных интегралов, если известны f и F. Так, из соотношения

$$p^2q^2/(p^2q^2+1)\Subset \mathrm{ber}(2\sqrt{xy})$$

вытекает, что

$$x\int_0^{\pi/2}\mathrm{ber}(x\sin t)\sin t\,dt=f(x,3,4),$$

где $f(x,3,4)$ — так называемый обобщенный синус — оригинал функции $p^3/(p^4+1)$ (см. реф. 1820). Отметим также формулы

$$\int_0^{\pi/2}e^{-\mathrm{tg}^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi e}{2}\,\mathrm{erfc}(1),$$

$$\int_0^{\pi/2}e^{-\mathrm{tg}^2\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi d\varphi=-\frac{e}{2}\,\mathrm{Ei}(-1).$$

В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1839. К задаче о неустановившейся фильтрации упругой жидкости к круговой галерее. Пилатовский В. П., Докл. АН СССР, 1953, 89, № 4, 635—638

В ранее опубликованных работах автора показано, что поставленная задача сводится к изучению функции давления

$$h(\rho,\tau)=\int_0^{\tau}\exp\left(-\frac{1+\rho^2}{4\xi}\right)I_0\left(\frac{\rho}{2\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Используя изображение $H(\rho,s)$ «оригинала» $h(\rho,\tau)$, автор находит ряды для вычисления функции $h(\rho,\tau)$, сходящиеся в достаточно широкой области.

В. В. Немыцкий

1840. Новый метод нахождения колебательных частей термодинамических функций. Зайцев Г. А., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 5, 817—819

Для молекулы с n колебательными степенями свободы колебательная часть статистической суммы имеет вид:

$$Q_{\text{кол}}=\Pi_{k=1}^{n}e^{-\lambda\nu_k/2}/(1-e^{-\lambda\nu_k}), \qquad (1)$$

где $\lambda>0$, а $x_k=\nu_k^2$ — корни векового уравнения матрицы D, составленной из коэффициентов полного взаимодействия.

В статье для $Q_{\text{кол}}$ устанавливается формула

$$\ln Q_{\text{кол}}=-n\ln\lambda-\frac{\ln|D|}{2}-\sum_{s=1}^{\infty}\ln\left|E+\frac{\lambda^2}{4\pi^2s^2}D\right|, \qquad (2)$$

где $|D|$ означает определитель матрицы D. Указывается, что формула (2) для своего применения не требует предварительного нахождения корней $x = \nu_k^2$ векового уравнения.

Вывод формулы (2) опирается на представление $\mathrm{sh}\, z$ в виде бесконечного произведения и на матричную формулу

$$\mathrm{Sp} \ln |E - B| = \ln (1 + \sum_{k=1}^{n} b_k), \qquad (3)$$

где $|xE - B| \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$ — вековой полином матрицы B. Хотя справедливость формулы (3) очевидна, в статье она выводится при помощи сложных преобразований с применением теории интегральных вычетов. *Ф. Р. Гантмахер*

1841. Точность регистрации механических величин, изменяющихся во времени. Дитль (Přesnost registrace časových průběhů mechanických veličin. Ditl Augustin), Slaboproudý obzor, 1954, 15, № 2, 64—67 (чеш.)

Если $g(t)$ — регистрируемая функция, то предполагается, что регистрирующее устройство дает функцию

$$f(t) + \int_0^\infty K(x)\, g(t - x)\, dx.$$

В качестве ошибки регистрации принимается величина

$$\delta = \lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} \mathrm{d}\, dt = A - 2aB + a^2 C,$$

где $\mathrm{d} = |g(t) - af(t + \vartheta)|^2$, а запаздывание ϑ и коэффициент a — параметры устройства. Величины

$$A = \pi^{-1} \int_0^\infty \Phi(\omega)\, d\omega, \; B = \int_0^\infty K(x)\, \varphi(\vartheta - x)\, dx,$$

$$C = \pi^{-1} \int_0^\infty \Phi(\omega)\, S^2(\omega)\, d\omega,$$

где

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} g(t)\, g(t + \tau)\, dt = \pi^{-1} \int_0^\infty \Phi(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

— автокорреляционная функция регистрируемой функции, а $S(\omega)$ — спектральная функция $K(t)$. Минимизируя δ как функцию a, находим $\delta_{\min} = A - B^2 C^{-1}$. Далее ϑ следует подобрать так, чтобы B было наибольшим. Производится расчет в случае $\Phi(\omega) = \omega_0/(\omega_0^2 + \omega^2)$ и $S(\omega) = \alpha^2/(\alpha^2 + \omega^2)$, который показывает, что относительная ошибка регистрации $\Delta = \delta_{\min}/A$ примерно равна 5% при $\omega_0 = 0{,}1\alpha$. *В. И. Левин*

1842. Уменьшение деформации импульса, передаваемого по коаксиальной совершенно однородной линии передачи, при помощи переноса частоты. Казнав (Réduction de la déformation des impulsions transmises par une ligne coaxiale parfaitement homogène par transposition de fréquence. Cazenave R.), Onde électr., 1954, 34, № 323, 147—152 (франц.), 98 (резюме англ.)

Для уменьшения деформации сигнала, вызванной линией передачи, предлагается исключение низких частот спектра сигнала при помощи модуляции с последующей фильтрацией высоких частот — в начале линии передачи, а затем поправка фаз спектральных составляющих сигнала — в конце линии передачи.

С целью обоснования этого предложения рассматриваются методом преобразования Лапласа решение телеграфного уравнения, соответствующее передаче единичного импульса, и изменения этого решения, вызванные вышеуказанными условиями. Для описания процесса при высоких частотах применяется асимптотическое выражение частотной характеристики линии передачи, ввиду чего выкладки являются приближенными. Результаты исследований пояснены графиками. *Н. А. Бразма*

1843. Анализ сигналов и анализ линейных операторов передачи. Часть II. Англес д'Орьяк (Analyse des signaux et analyse des opérateurs linéaires de transmission. 2me Partie. Anglès d'Auriac Henri), Electr., courants faibles, électronique, 1953, 2, № 6, 162—172 (франц.)

Часть I см. РЖМат, 1954, 5166.

В электротехнике применяются основанные на преобразовании Фурье спектральные представления функций, характеризующих передаваемые сигналы и передающие устройства (Харкевич А. А., Спектры и анализ, Гостехиздат М.— Л., 1952, §§ 3, 4 и 12). В работе исследованы следующие вопросы теории таких представлений, относящихся к линейным системам:

1. Спектр частот суммы неограниченно повторенных с периодом T_0 сигналов, когда известен спектр отдельного сигнала. Спектр суммы сигналов дискретен; частоты этого спектра кратны $1/T_0$.

2. Сигнал, спектр которого является суммой повторенных с периодом f_0 спектров данного сигнала. Сигнал, соответствующий сумме спектров, выражается в виде ряда мгновенных импульсов, следующих друг за другом через промежуток времени $1/f_0$.

3. Оператор системы, временна́я характеристика которой равна сумме неограниченно повторенных с периодом T_0 временны́х характеристик данной системы, причем известна частотная характеристика данной системы. Оператор, соответствующий сумме временны́х характеристик, оказывается суммой некоторых дискретных фильтрующих операторов, каждый из которых характеризует систему с бесконечно узкой полосой пропускания вокруг частоты, кратной $1/T_0$.

4. Оператор системы, частотная характеристика которой равна сумме неограниченно повторенных с периодом f_0 частотных характеристик данной системы, причем известна временна́я характеристика данной системы. Оператор, соответствующий сумме частотных характеристик, оказывается суммой некоторых дискретных операторов эхо, каждый из которых действует в момент времени, кратный $1/f_0$.

5. Некоторый элементарный сигнал $\Pi_0 = (\sin 2\pi f_0 t)/2\pi f_0 t$, спектр частот f которого равен нулю при $|f| > |f_0|$ и равен $1/2f_0$ между $-f_0$ и $+f_0$, а также сигнал Π_τ, спектр частот которого получен из предыдущего спектра умножением на $\exp(-i2\pi\tau f)$.

6. Некоторый элементарный оператор Φ_0, частот-

ная характеристика которого равна нулю при $|f|>|f_0|$ и равна $1/2f_0$ между $-f_0$ и $+f_0$. Временна́я характеристика этого оператора выражается указанной функцией Π_0. Рассмотрен также оператор Φ_τ, частотная характеристика которого получена из предыдущей частотной характеристики умножением на $\exp(-i2\pi\tau f)$.

7. Сигнал, соответствующий спектру частот, равному нулю при $|f|>|f_0|$ и изменяющемуся каким-либо образом между $-f_0$ и $+f_0$. Такой сигнал $s(t)$ разлагается в бесконечный ряд $s(t)=\Sigma_k s(t_k)\Pi_{tk}$ дискретных сигналов указанного вида Π_τ, следующих друг за другом через промежуток времени $1/2f_0$.

8. Оператор системы, частотная характеристика которой равна нулю при $|f|>|f_0|$ и изменяется каким-либо образом между $-f_0$ и $+f_0$. Оператор P такой системы с временно́й характеристикой $a(t)$ разлагается в бесконечный ряд $P=\Sigma_k a(t_k)\Phi_{tk}$ операторов указанного вида Φ_τ.

В выкладках автор часто пользуется импульсной функцией δ. Рассуждения автора носят наводящий, нестрогий характер. Указано значение полученных результатов для теории телевидения.

Н. А. Бразма

1844. Анализ сигналов и анализ линейных операторов передачи. Часть III. Англес д'Орьяк (Analyse des signaux et analyse des opérateurs linéaires de transmission. 3me Partie. Anglès d'Auriac Henri), Electr., courants faibles, électronique, 1953, **2**, № 7, 179—187 (франц.)

Части I и II см. РЖМат, 1954, 5166; 1955, 1843.

В работе изложен случай, когда спектр сигнала и частотная характеристика системы отличны от нуля лишь в некотором интервале между $-f_0$ и $+f_0$ (f_0 конечно). Отмечено, почему именно этот случай особенно важен для практики.

Рассмотрен способ перехода от разложения $s(t)=\Sigma s(t_k)$. Π_{t_k} функции, выражающей отправленный сигнал, к разложению $\sigma(t)=\Sigma\sigma(t_k)\cdot\Pi_{t_k}$ функции, выражающей переданный системой сигнал (обозначения см. реф. 1843). Связь между $\sigma(t_k)$ и $s(t_k)$ получается в виде бесконечного линейного преобразования. Именно, если рассматривать $\sigma(t_k)$ и $s(t_k)$ как элементы векторов с бесконечным числом составляющих, то первый из этих векторов выражается как произведение некоторой бесконечной квадратной матрицы, в элементы которой входят числа $a(t_k)$ — значения временно́й характеристики системы в соответствующие дискретные моменты времени, — на второй из указанных векторов. Указано, почему с точки зрения физики обычно можно довольствоваться конечным числом элементов этих векторов.

Дано обоснование возможности практического нахождения чисел $a(t_k)$ при помощи пробных сигналов специального вида, что дает возможность быстрой характеристики системы экспериментальным путем.

Н. А. Бразма

1845 К. Математика и техника переменных токов Шёнхольцер (Mathématiques et technique des courants alternatifs. Schönholzer E., XX + 364 pp., 200 fig., Paris, Dunod, 1953, 1.960 F.), Bibliogr. sci. et ind., 1953, **51**, № 438, 15 (библ.)

См. также: 1628, 1631, 1632, 1635, 1700, 1707, 1708, 1729, 1739, 1748, 1749, 1758, 1779, 1789, 1791, 1793, 1896, 1964, 1965, 1969, 1971, 1978.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1846. О линейных функциональных уравнениях в локально выпуклых линейных топологических пространствах. Альтман (On linear functional equations in locally convex linear topological spaces. Altman M.), Studia math., 1953, **13**, № 2, 194—207 (англ.)

Основная часть теории Рисса—Шаудера уравнений с линейными вполне непрерывными операторами, действующими в банаховых пространствах, была обобщена Лере (Leray J., Acta scient. math., 1950, **B12**, 177—186) на случай, когда операторы действуют в линейных локально выпуклых топологических пространствах. Автор изучает уравнения в тех же пространствах методом, отличным от метода Лере. При этом получаются как результаты, аналогичные результатам Лере, так и новые (особенно для сопряженного уравнения).

Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное локально выпуклое топологическое пространство. По каждой центрально симметричной окрестности $\mathfrak{B}$ нуля вводится в $\mathfrak{X}$ псевдонорма $|x|_{\mathfrak{B}}=\inf_{x\,h\in\mathfrak{B}} h$. Через U обозначается линейный вполне непрерывный оператор, действующий в $\mathfrak{X}$, т. е. оператор, который аддитивен, непрерывен по Гейне (каждую сходящуюся последовательность преобразует в сходящуюся) и который некоторую окрестность нуля преобразует в компактное множество. Эту окрестность можно считать выделенной при помощи конечного числа неравенств для псевдонорм: $|x|_{\mathfrak{B}_i}<\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$.

В пространстве $\mathfrak{X}$ вводится псевдонорма

$$|x|=\sup_i |x|_{\mathfrak{B}_i}.$$

Через Θ обозначается класс элементов $x\in\mathfrak{X}$, у которых $|x|=0$. Замыкание $\mathfrak{X}'$ фактор-пространства $\mathfrak{X}/\Theta$ оказывается банаховым пространством, если для элементов $\xi\in\mathfrak{X}/\Theta$ положить $|\xi|=|x|$ при $x\in\xi\subset\mathfrak{X}$.

Оператор U естественным образом порождает линейный вполне непрерывный оператор $\mathfrak{U}$, действующий в $\mathfrak{X}'$. Теоремы об уравнении с оператором U (в топологическом пространстве $\mathfrak{X}$) получаются применением теории Рисса — Шаудера к уравнению с оператором $\mathfrak{U}$ (в банаховом пространстве $\mathfrak{X}'$).

В первой части работы доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Множество значений оператора $T(x)=x-U(x)$ замкнуто.

Через G_n обозначается совокупность решений уравнения $T^n(x)=0$. Через L_n — множество значений оператора T^n.

Теорема 2. Подпространство G_n при каждом n конечномерно.

Теорема 3. Существует такое ν, что $G_n=G_\nu$ при $n>\nu$ и $G_n\neq G_\nu$ при $n<\nu$.

Теорема 4. Если уравнение $T(x)=y$ разрешимо при любом $y\in\mathfrak{X}$, то решение всегда единственно.

Теорема 5. $L_n=L_\nu$ при $n>\nu$, $L_{n+1}\neq L_n$ при $n<\nu$.

Число h — регулярное значение для U, если уравнение $x-hU(x)=0$ не имеет отличных от нуля решений. В противном случае h — собственное число. Совокупность собственных чисел — спектр оператора U.

Теорема 6. Если h — регулярное значение, то преобразование $x-hU(x)$ является гомеоморфным отображением $\mathfrak{X}$ на себя.

Элемент $x\in\mathfrak{X}$ называется нуль-элементом, если $T^\nu(x)=0$. Элементы $y\in L_\nu$ называются элементами ядра.

Теорема 7. Каждый элемент из $\mathfrak{X}$ представим единственным образом в виде суммы нуль-элемента и элемента ядра.

Теорема 8. Существует единственное линейное преобразование $T^{(0)}$, переводящее каждый элемент ядра в себя и каждый нуль-элемент в нуль.

Из теоремы 8 вытекает, что оператор U может быть единственным образом представлен в виде $U=U_1+U_2$, где U_1 — линейный оператор, который переводит все нуль-элементы в нуль, U_2 переводит в нуль все элементы ядра. В теоремах 9, 10, 12 указаны свойства операторов U_1, U_2.

Теорема 11. Спектр оператора U не имеет конечных предельных точек.

Во второй части работы изучается сопряженное уравнение.

В пространстве $\overline{\mathfrak{X}}$ линейных функционалов X на $\mathfrak{X}$ определяется сильная сходимость последовательности $\{X_n\}$ к некоторому X_0 как равномерная сходимость на какой-либо окрестности $\mathfrak{D}$ нуля:

$$\sup_{x\in\mathfrak{D}}|X_n(x)-X_0(x)|\to 0.$$

Через $\widetilde{U}$ обозначается оператор, сопряженный линейному вполне непрерывному оператору U, действующему в $\mathfrak{X}$:

$$\widetilde{U}X(x)=X(Ux)\qquad(x\in\mathfrak{X},\ X\in\overline{\mathfrak{X}}).$$

Теоремы 14—15. Уравнение $X-\widetilde{U}(X)=Y$ разрешимо при любом $Y\in\overline{\mathfrak{X}}$ в том и только в том случае, когда уравнение $X-\widetilde{U}(X)=0$ имеет только нулевое решение.

Теорема 17. Операторы U и $\widetilde{U}$ имеют одинаковый спектр.

Теорема 19. Если $x-hUx=0$, $X-h'\widetilde{U}(X)=0$ ($h\neq h'$), то $X(x)=0$.

Далее изучаются совместно уравнения $x-hU(x)=0$, $X-h\widetilde{U}(X)=0$. Показывается, что они имеют одинаковое число $d(h)$ линейно независимых решений $\{x_i\}$, $\{X_i\}$. Уравнение $x-hU(x)=y$ имеет решение для тех y, которые удовлетворяют условиям $X_i(y)=0$ ($i=1,\dots,d(h)$). *М. А. Красносельский*

1847. **Об изометрических отображениях пространств типа (F). Хажинский** (Sur les transformations isométriques des espaces du type (F). Charzyński Z.), Studia math., 1953, **13**, № 1, 94—121 (франц.)

Автор доказал следующую теорему 1:

Каждая изометрия U двух n-мерных пространств типа (F), переводящая их нулевые элементы в себя, есть линейное отображение (n — натуральное число). Метод доказательства основан на введении однородной псевдонормы, сохраняющей изометричность оператора U, и на применении теоремы Мазура и Улама (Банах С., Курс функціонального аналізу, Радянська школа, Київ, 1948, 142). В дополнении автор поместил теорему С. Мазура (вместе с доказательством Мазура), утверждающую, что теорема I равносильна следующей теореме II.

Если группа G гомеоморфизмов конечномерного пространства E типа (F) на себя, содержащая все сдвиги этого пространства, такова, что ее подгруппа G_0, образованная всеми преобразованиями из G, при которых нулевой элемент неподвижен, компактна (в том смысле, что из каждой бесконечной последовательности преобразований из G_0 можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом компактном подмножестве пространства E), то все преобразования из G_0 линейны. *M. Altman*

1848. **О функциях ограниченной вариации, зависящих от параметра. Орлич** (On functions of finite variation, depending on a parameter. Orlicz W.), Studia math., 1953, **13**, № 2, 218—232 (англ.)

Рассматриваются некоторые функции $x=x(v)$ вещественного параметра v ($a\leqslant v\leqslant b$) с областью значений, принадлежащей банахову пространству X.

Для всякого подмножества $A\subset[a,b]$ вводятся: вариация $x(v)$ на A

$$V_A x(v)=\sup_{v_i,\,\varepsilon_i,\,n}\left\|\sum_1^n\varepsilon_i\{x(v_{i+1})-x(v_i)\}\right\|\qquad(v_i\in A,\ \varepsilon_i=\pm 1),$$

сильная вариация

$$W_A x(v)=\sup_{v_i,\,n}\sum_1^n\|x(v_{i+1})-x(v_i)\|\quad(v_i\in A),$$

существенная вариация и существенная сильная вариация

$$V_A^* x(v)=\inf_{A'}V_{A'}x(v)\quad(A'\subset A;\ \operatorname{mes}A'=\operatorname{mes}A)$$

$$W_A^* x(v)=\inf_{A'}W_{A'}x(v)\quad(A'\subset A;\ \operatorname{mes}A'=\operatorname{mes}A)$$

(Гельфанд И. М., Матем. сб., 1938, **4**, 235—284).

Индекс A опускается, если $A=[a,b]$.

Предполагая, что X есть пространство M функций $x=f(t)$, измеримых и существенно ограниченных при $a\leqslant t\leqslant b$, с нормой $\|x\|=\operatorname{ess\,sup}|f(t)|$ ($t\in[a,b]$), и что векторная функция $x(v)$ порождается функцией двух переменных: $x(v)=D(t,v)$, измеримой при $a\leqslant t$, $v\leqslant b$, автор доказывает, что:

1. $V^*x(v)=\operatorname{ess\,sup}_t[\operatorname{ess\,var}_v D(t,v)]$.

2. Если $D(t,v)$ удовлетворяет условию

$\int_a^u D(t,v)\,dt = \int_a^v D(t,u)\,dt$ для всяких $u, v \in [a,b]$, то $Vx(v) < \infty$ тогда и только тогда, когда $D(t,v)$ удовлетворяет интегральному условию Липшица

$$\int_a^b |D(t,v+h) - D(t,v)|\,dt \leqslant K|h|; \quad (a - v \leqslant h \leqslant b - v).$$

При этом $Vx(v)$ равна $V^*x(v)$ и совпадает с минимальным значением константы K.

Из предложения 2 легко следует, что вещественная функция $f(t)$, интегрируемая на сегменте $[0,b]$, имеет на этом сегменте существенно ограниченную вариацию в том и только в том случае, когда

$$\int_0^b |f(t+h) - f(t)|\,dt \leqslant K|h| \text{ при всяком } |h| < b.$$

Здесь предполагается, что за пределами $[0,b]$ функция $f(t)$ продолжена, как периодическая, с периодом b.

Приводится еще следующее применение предложений 1 и 2.

Пусть $\{\varphi_i(t)\}$ — полная ортонормированная система в L_2, а $\{\lambda_i\}$ — данная числовая последовательность. Каждой функции $f(t) \in M$ отвечает разложение Фурье $f(t) \sim \sum_1^\infty a_i\varphi_i(t)$.

Для того чтобы ряд $\sum_1^\infty a_i\lambda_i\varphi_i(t)$ также был разложением Фурье некоторой функции $F(t) \in M$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\lambda_i\}$ была ограниченной и чтобы функция

$$D(t,v) = \sum_1^\infty \lambda_l \int_a^t \varphi_i(\tau)\,d\tau \int_a^v \varphi_i(\tau)\,d\tau$$

удовлетворяла условию:

$$\int_a^b |D_t'(t,v+h) - D_t'(t,v)| \leqslant K|h| \quad (a - h \leqslant v \leqslant b - h).$$

М. А. Рутман

1849. **О линейных функциональных уравнениях.** Соболев В. И., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **27**, 43—46

Показывается, что альтернатива Фредгольма для вполне непрерывного оператора, действующего в пространстве Банаха с базисом, может быть получена непосредственно из альтернативных теорем для алгебраических уравнений. Для этого вполне непрерывный оператор известным приемом аппроксимируется конечномерным оператором. *Ф. В. Широков*

1850. **О базисе в пространстве непрерывных функций, определенных на замкнутом ограниченном множестве n-мерного пространства.** Гуревич Л. А., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **27**, 84—87

Известный прием построения базиса в пространстве $C[0,1]$ (см. например, Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М.—Л., Гостехиздат, 1951, 219—221) обобщается на пространство $C(F)$ непрерывных функций, заданных на ограниченном замкнутом множестве F n-мерного пространства; отсюда выводится существование базиса в симметричном коммутативном нормированном кольце с конечным числом образующих, норма в котором удовлетворяет условию $\|x^2\| \geqslant k^2\|x\|^2$, $0 < k \leqslant 1$. *Ф. В. Широков*

1851. **О прямом произведении операторных алгебр. II.** Турумару (On the direct-product of operator algebras. II. Turumaru Taka si), Tôhoku Math. J., 1953, 5, сер. 2, № 1, 1—7 (англ.)

Часть I см. Tôhoku Math. J., 1952, (2) 4, 242—251.

Рассматривается прямое произведение $A_1 \times A_2$ двух $*$-колец (C^*-алгебр в терминологии автора) A_1, A_2 с единицей. Сначала доказывается, что если A_1 и A_2 представить $*$-изоморфным и изометричным образом в виде колец операторов в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ и взять кольцо A, порожденное всеми операторами $x \times y$, $x \in A_1$, $y \in A_2$, в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, то $A_1 \times A_2$ и A также $*$-изоморфны и изометричны.

Если при этом $A_1 \times A_2$ — простое кольцо, то A_1, A_2 — также простые кольца и если $A_1 \times A_2$ — фактор, то A_1, A_2 также факторы.

Далее автор рассматривает тот случай, когда A_1 и A_2 состоят из вполне непрерывных операторов в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ (конечно, в этом случае A_1 и A_2 уже не содержат единицы).

В этом случае:

1) $A = A_1 \times A_2$ также состоит из вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$;

2) если A_1, A_2 — кольца всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ соответственно, то $A_1 \times A_2$ есть кольцо всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$;

3) если A_1, A_2 — простые кольца вполне непрерывных операторов, то и $A_1 \times A_2$ — простое кольцо. *М. А. Наймарк*

1852. **О минимальных функционалах для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка.** Бирман М. Ш., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 953—956

Исследуется связь между решением уравнения

$$\widetilde{S}g = h, \qquad (1)$$

где $\widetilde{S}$ — некоторое положительно определенное расширение оператора S, и задачей о минимуме соответствующих квадратичных функционалов. Используя некоторые факты теории расширений операторов и теории общих граничных задач, автор получил новые формы вариационных задач, которые в сочетании с известными методами позволяют находить двусторонние приближения к искомому минимуму. Автором дано обобщение метода Треффца на случай общих положительно определенных задач.

Квадратичный функционал, минимум которого дает решение уравнения (1), имеет следующий вид:

$$H[g,g] = \widetilde{S}_1[g,g] + \int_\Gamma [\widetilde{L}^{-1}(\widetilde{K}_1\gamma_1 g - \gamma_2 g)]\,\overline{(\widetilde{K}_1\gamma_1 g - \gamma_2 g)}\,d\Gamma, \qquad (2)$$

где S_1 — расширение оператора S с чисто естественным граничным условием (Бирман М. Ш., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 2, 205—208; РЖМат, 1954, 3328), в которое входит оператор $\widetilde{K}_1$. В выборе оператора L имеется некий произвол, однако он, в определенном смысле, должен быть подчиненным опе-

ратору $\tilde{S}$; γ_1, γ_2 — основные граничные операторы (Вишик М. И., Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, 1, 187—246).

Доказано, что решение g_0 уравнения (1) сообщает минимум функционалу $\Phi(g) = H[g,g]$, где g — любое решение уравнения $S^*g = h$, удовлетворяющее условию $\gamma_1 g \in D(\tilde{K})$. Для минимизирующей последовательности $\Phi(g - g_0) \to 0$.

В работе указано также, как строить минимальные функционалы в случае решения однородного уравнения при неоднородных граничных условиях. Сформулированы теоремы о связи соответствующей задачи на минимум с решением однородного уравнения при данных граничных условиях.

М. И. Вишик

1853. О перестановках бесконечных рядов с гиперкомплексными числами. Ружичка Ярослав., Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 1, 23—73 (резюме нем).

Пусть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \qquad (1)$$

— ряд векторов n-мерного пространства с ограниченными членами. Совокупность предельных точек последовательности частных сумм $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ автор называет граничным множеством ряда и обозначает $\mathfrak{H}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots)$. Сумма граничных множеств всех рядов, полученных из ряда (1) путем перестановок его членов, называется множеством сумм ряда (1) и обозначается $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Далее вводятся: множество предельных точек последовательности членов ряда (1) $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, наименьший модуль $\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, содержащий $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, и замыкание этого модуля $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \overline{\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}$. Существенную роль в формулировке и доказательстве основного результата играет понятие ряда разностей:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i - \pi_i), \qquad (2)$$

где π_i — точка множества $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, ближайшая к α_i. Все δ_i, за возможным исключением конечного числа их, определяются однозначно; $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ называется симметричным, если для любого элемента φ ряды $\sum_{i=1}^{\infty} [\,|(\varphi, \alpha_i)| - (\varphi, \alpha_i)]$ и $\sum_{i=1}^{\infty} [\,|(\varphi, \alpha_i)| + (\varphi, \alpha_i)]$ сходятся или расходятся одновременно.

Статья посвящена исследованию структуры множества сумм $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ в связи со строением множества членов ряда (1) и является обобщением результатов Ярника (Jarník V., Věst. Král. Čes. společ. nauk, Třída mat.-přír., 1927, 8, 1—45) и Беренда (Behrend F., Math. Z., 1938, 36, 298—301). Основной результат работы: если (1) — симметричный ряд и (2) — его ряд разностей, то

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \varkappa + \overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}},$$

где $\varkappa$ — некоторый элемент пространства, $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — определенное выше множество и $\mathfrak{L}$ — пространство расходимости ряда разностей. Если ряд (1) несимметричен, то множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ пусто. Пространство расходимости определяется как ортогональное дополнение пространства сходимости, т. е. подпространства тех элементов φ, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, \alpha_i)$ сходится абсолютно.

Если $\lim_{i \to \infty} \alpha_i = 0$, то ряд (1) совпадает со своим рядом разностей (2) и доказанная теорема превращается в известную теорему Э. Штейница об условно сходящихся рядах (Steinitz E., J. reine und angew. Math., 1913, **143**, 128—175; 1914, **144**, 1—40).

М. И. Кадец

1854. О квантовой теории полей. Ривье (On the quantum theory of fields. Rivier Dominique), Progr. Theoret. Phys., 1953, 9, № 6, 633—662 (англ.; резюме франц.)

Рассматривается волновое поле $\chi_\rho(x)$, удовлетворяющее релятивистски инвариантной системе дифференциальных уравнений, допускающей также дополнительную группу «градиентных» преобразований (ср. Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1947). При квантовании этого волнового поля функции $\chi_\rho(x)$ заменяются зависящими от x операторами в гильбертовом пространстве $\chi_\rho(x)$, удовлетворяющими некоторым перестановочным соотношениям, выводимым обычно из релятивистски неинвариантного «канонического формализма» (Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, М., Гостехиздат, 1949). Инфинитезимальным преобразованиям $g_{(i)}$ группы Лоренца и градиентной группы в силу теоремы Э. Неттер (Noether E., Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 1918, 235) отвечают некоторые функционалы $G_{(i)}[\chi]$ относительно волновых функций $\chi_\rho(x)$, являющиеся интегралами уравнений движения (эти интегралы имеют смысл энергии, импульса, момента количества движения и заряда: см. цитированные выше книги В. Паули и Г. Вентцеля); после квантования $G_{(i)}$ переходят в операторы в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{G}_{(i)}$, определенные правилом составления $G_{(i)}[\chi]$ с точностью до порядка некоммутирующих сомножителей $\chi_\rho(x)$.

Предлагается вместо «канонического формализма» при квантовании волновых полей исходить из следующего принципа: перестановочные соотношения между операторами $\chi_\rho(x)$ должны быть таковы, чтобы выполнялись соотношения

$$[\boldsymbol{G}_{(i)}, \chi_\rho] \equiv \boldsymbol{G}_{(i)} \chi_\rho - \chi_\rho \boldsymbol{G}_{(i)} = g_{(i)} \chi_\rho; \qquad (1)$$

при этом условии, в частности, $\boldsymbol{G}_{(i)}$ будут определять представление группы лоренцовых и градиентных преобразований, т. е. будут иметь место равенства

$$[\boldsymbol{G}_{(i)}, \boldsymbol{G}_{(k)}] = c^l_{ik} \boldsymbol{G}_{(l)},$$

где c^l_{ik} — структурные константы группы. Задача нахождения операторов χ_ρ, $\boldsymbol{G}_{(i)}$, удовлетворяющих заданным перестановочным соотношениям (1), близка к задаче о нахождении бесконечномерных представлений групп. Показывается, что в случае полей χ_ρ, все компоненты которых удовлетворяют волновому уравнению $(\Box - \varkappa^2)\chi_\rho(x) = 0$, условия (1) однозначно определяют значения коммутаторов (или антикоммутаторов):

$[\chi_\rho(x), \chi_\sigma(y)]_\omega \equiv \chi_\rho(x)\chi_\sigma(y) + \omega\chi_\sigma(y)\chi_\rho(x)$, $\omega = \pm 1$, где знак ω зависит от закона преобразования вол-

новых функций χ_ρ при лоренцовых преобразованиях («связь спина и статистики»; ср. цитированную выше книгу В. Паули), причем для $[\chi_\rho(x), \chi_\sigma(y)]\omega$ получаются точно те же выражения, что и при «каноническом формализме» квантования; одновременно эти условия однозначно определяют порядок некоммутативных множителей в выражении операторов $G_i[\chi]$ через χ_ρ.
А. М. Яглом

1855. **Квантовая теория поля. I. Явное решение уравнения Дайсона в электродинамике без применения диаграмм Фейнмана.** **К а я н ь е л л о** (On quantum field theory — I: Explicit solution of Dyson's equation in electrodynamics without use of Feynman graphs. C a i a n i e l l o E. R.), Nuovo Cimento, 1953, **10**, № 12, 1634—1652 (англ.; резюме итал.)

Цель работы — дать явные выражения для элементов S-матрицы в квантовой электродинамике описывающих заданный процесс рассеяния. Автор изучает лишь алгебраическую структуру рассматриваемых матричных элементов, не касаясь вопроса о природе расходящихся выражений, появляющихся при вычислении S-матрицы методом теории возмущений. Символом $\begin{pmatrix} h_1 h_2 \dots h_n \\ k_1 k_2 \dots k_n \end{pmatrix}$ обозначается детерминант n-порядка с элементами $a_{ij} \equiv (h_i k_j)$ (смысл символов $(h_i k_j)$ определяется в каждом конкретном случае).

Аналогично символом $(12 \dots 2n)$ обозначается пфаффиан, значение которого вычисляется по формуле

$$(12 \dots 2n) = \sum{}' (-1)^p (i_1 i_2)(i_3 i_4) \dots (i_{2n-1}, i_{2n}).$$

Суммирование в правой части распространено на все перестановки $(i_1, i_2 \dots i_{2n})$ чисел $(1,2, \dots, 2n)$, удовлетворяющие условиям $i_1 < i_2$, $i_3 < i_4, \dots, i_{2n-1} < i_{2n}$; $i_1 < i_3 < \dots < i_{2n-1}$. Знак каждого члена так же, как в детерминанте, определяется четностью соответствующей перестановки. Детерминанты и пфаффианы удобны для описания полей, подчиняющихся статистике Ферми. Для полей, подчиняющихся статистике Бозе, вводятся соответствующие понятия: перманент, обозначаемый символом $\begin{bmatrix} h_1 h_2 \dots h_n \\ k_1 k_2 \dots k_n \end{bmatrix}$, и гафниан $[12 \dots N]$. Перманент вычисляется аналогично детерминанту, а гафниан — аналогично пфаффиану с той лишь разницей, что перед всеми слагаемыми берется знак $+$. Автор формулирует ряд предложений о свойствах введенных символов и о связи между ними.

Произвольный элемент S-матрицы, согласно Дайсону, можно представить в виде

$$M_{FI} = \sum_N \frac{e^N}{N!} \times$$

$$\times \int \sum \langle \Psi_F | T \left(\prod_{i=1}^{N} \bar{\Psi}_{\alpha_i}(x_i) \Psi_{\beta_i}(x_i) A_{\mu_i}(x_i) \gamma^{\mu_i}_{\alpha_i \beta_i} \right) | \Psi_I \rangle.$$

Символ $\int \sum$ обозначает интегрирование по всем x_i и суммирование по всем индексам (остальные обозначения стандартны). M_{FI} описывает переход из начального состояния Ψ_I, в котором имеется n электронов, m позитронов и a фотонов, в конечное состояние Ψ_F, в котором p электронов, q позитронов и b фотонов. Структура матричного элемента M_{FI} определяется числами $N_0 = a + b$ и $P_0 = n + q = m + p$. Основной результат работы состоит в том, что

$$M_{FI} = (-1)^{P_{FI}} \sum_{(N = P_0 + 2Q)} \frac{e^N}{N!} \times$$

$$\times \int \sum \begin{pmatrix} 12 \dots N V^{(1)} \dots V^{(N_0)} \\ 12 \dots N u^{(1)} \dots u^{(N_0)} \end{pmatrix} [12 \dots N z^{(1)} \dots z^{(p_0)}].$$

Суммирование распространено на значения $N \equiv P_0 \pmod 2$ $p_{FI} = p(m+n) + \left[\binom{n}{2} - \binom{p}{2} \right]$. Элементы детерминанта и гафниана определены равенствами:

$$\begin{cases} (hk) = \begin{cases} (1/2)\,[S^F(x_h - x_k)\gamma^\mu k]_{\beta_h \beta_k} & (h \neq k) \\ 0 & (h = k) \end{cases} \\ (u^{(k)} h) = (h u^{(k)}) = v^{(k)}_{\beta_h}(x_h) \\ (V^{(k)} h) = (h V^{(k)}) = \sum_{\alpha_h = 1}^{4} v^{(k)}_{\alpha_h}(x_h)\, \gamma^{\mu_h}_{\alpha_h \beta_h} \\ (V^{(h)} u^{(k)}) = (u^{(k)} V^{(h)}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [hk] = (1/2)\, \delta_{\mu_h \mu_k} D^F(x_h - x_k) \\ [h z^{(k)}] = z^{(h)}_{\mu_k}(x_k) \\ [z^{(h)} z^{(k)}] = 0. \end{cases}$$

Здесь $S^F(x)$ и $D^F(x)$ — известные функции Фейнмана. Через $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ и $z^{(k)}$ обозначены волновые функции электронов, позитронов и фотонов в начальном и конечном состояниях. *Ю. А. Гольфанд*

1856. **Вариационные методы в теории столкновений.** **Р у с о п у л о с** (Méthodes variationnelles en théorie des collisions. R o u s s o p o u l o s P a u l), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 19, 1858—1860 (франц.)

Вариационный метод Кахана и Ридо (Kahan T., Rideau G., J. phys. et radium, 1952, **13**, 326), справедливый лишь в случаях, когда лагранжиан L — симметричный оператор, обобщается на случай любого оператора L, определенного в гильбертовом пространстве. Приводится функционал J, отыскание экстремума которого эквивалентно решению системы дифференциальных уравнений для функций, входящих в функционал. Показано, что применение этого функционала к уравнениям Швингера — Липпмана (Schwinger, Lippmann, Phys. Rev., 1950, **79**, 469) ведет к вариационному принципу, аналогичному принципу Швингера. *Д. Ч.*

1857 **Д. Спектральная теория оператора** $-\Delta u + cu$ **в неограниченном пространстве размерности больше трех.** **З ю з ь к о М. П.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1954

См. также: 1775, 1787, 1865, 1866, 1954.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1858. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах. Воробьев Н. Н., Матем. сб., 1954, 34(76), № 1, 89—126

Теория суммирования независимых слагаемых переносится на случайные величины со значениями из конечной абелевой группы. Выясняется, что безгранично делимые и устойчивые распределения играют ту же роль, что и в классической теории. Находится каноническое представление безгранично делимых законов. Во всех этих исследованиях роль классического аппарата характеристических функций играет аппарат теории характеров конечных абелевых групп. В заключительном параграфе указываются приложения к вычислению финальных вероятностей для некоторых специальных цепей Маркова с конечным числом состояний. Строится пример, показывающий, что теорема Крамера о невозможности разложить нормальное распределение в композицию двух ненормальных распределений не имеет естественного аналога в рассматриваемой автором теории. *Е. Б. Дынкин*

1859. Обобщение задачи Бюффона об игле. Мантел (An extension of the Buffon needle problem. Mantel Nathan), Ann. Math. Statistics, 1953, 75, № 23, 674—677 (англ.)

Автор предлагает следующее видоизменение известной задачи Бюффона. Иглу длины $L \gg 1$ бросают наугад на плоскость, разграфленную на единичные квадраты двумя перпендикулярными семействами параллельных прямых. В этом случае математическое ожидание числа пересечений иглы с прямыми равно $4L/\pi$, дисперсия числа пересечений при большом L близка к $L^2(1 + 2/\pi - 16/\pi^2)$. Описанная схема так же, как и классический эксперимент Бюффона, могут быть использованы для эмпирического определения числа π. Проделанные автором вычисления показывают, что его схема при том же числе испытаний дает более точные оценки числа π, чем схема Бюффона; и в этом оценка, полученная из эмпирической дисперсии, точнее чем оценка, полученная из эмпирического среднего. *А. А. Юшкевич*

1860. О единственности функции распределения в задаче Бюффона об игле. Кламкин (On the uniqueness of the distribution function for the Buffon needle problem. Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 10, 677—680 (англ.)

Ставится вопрос, существуют ли распределения, отличные от равномерного, при которых вероятность пересечения иглой параллельных линий в известной задаче Бюффона (см. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Гостехиздат, М.— Л., 1950, 35) имеет такое же значение, как в обычно рассматриваемом равномерном случае. Рассуждения автора справедливы лишь при выполнении ряда условий, наиболее стеснительные из которых лишают задачу первоначального физического смысла и автором не оговорены. Доказано, что при этих условиях равномерное распределение является единственным. *А. А. Юшкевич*

1861. Анализ многомерных стационарных временных рядов. Уитл (The analysis of multiple stationary time series. Whittle P.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, B15, № 1, 125—139 (англ.)

На многомерные случайные стационарные последовательности обобщаются некоторые статистические выводы, полученные в применении к одномерному случаю в предыдущих работах автора (см. Hypothesis testing in time series analysis, Upsala, 1951; Scand. Actuarie tidskr., 1952, № 1—2, 48—60; РЖМат, 1955, 1400). После некоторых предварительных замечаний в разделе 2 работы вводятся в рассмотрение теоретические матрицы вторых моментов (корреляционных функций) и спектральных плотностей многомерной случайной стационарной последовательности $\{x_t\}$ и соответствующие им эмпирические матрицы, построенные по выборке из N последовательных значений величин x_t; далее указывается аналог «разложения Вольда» для таких последовательностей, найденный В. Н. Засухиным (Докл. АН СССР, 1941, 33, 435—437). В следующем разделе дается многомерное обобщение теоремы А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР, сер. мат., 1941, 5, № 1, 3—14), касающейся среднего квадрата ошибки линейного экстраполирования стационарной последовательности на шаг вперед.

В разделе 4 выводятся асимптотические формулы (при $N \to \infty$) для моментов распределения вероятностей произвольной линейной функции от эмпирических корреляционных функций; одномерный случай этой формулы имеется в первой из цитированных выше более ранних работ автора. Полученные результаты прилагаются далее (в предположении, что исходная последовательность — гауссовская) к построению оценок наибольшего правдоподобия для параметров многомерной случайной стационарной последовательности, определению максимального значения соответствующей «функции правдоподобия» и нахождению матрицы вторых моментов построенных оценок (ср. РЖМат, 1955, 1400); этому посвящены разделы 5 и 6, являющиеся центральными в работе.

В разделе 7 строится критерий согласия для многомерных стационарных последовательностей, позволяющий определять степень правдоподобия определенной гипотезы H_1 о корреляционной матрице такой последовательности относительно другой более широкой гипотезы H_2. В последнем разделе кратко суммируются результаты применения выводов предыдущих разделов к анализу двумерного временного ряда, представляющего значения суммарной площади солнечных пятен в северном и в южном полушариях Солнца за 60 лет. Доказательства в работе не претендуют на полную математическую строгость (в частности, ограничения общего характера, требуемые для справедливости высказываемых теорем, обычно не уточняются). *А. М. Яглом*

1862. Некоторые случайные блуждания, возникающие в моделях изучения. I. Карлин (Some random walks arising in learning models. I. Karlin Samuel), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 4, 725—756 (англ.)

Изучаются эргодические свойства однородного марковского процесса с дискретным временем. Состояниями процесса являются точки отрезка [0, 1]. За единицу времени система, находящаяся в состоянии x, переходит в состояние σx с вероятностью $1-\varphi(x)$ и в состояние $1-\alpha+\alpha x$ с вероятностью $\varphi(x)$ (здесь α, σ — постоянные и $0<\alpha<1$, $0<\sigma<1$). К этому процессу, вообще говоря, неприменимы известные общие эргодические теоремы для марковских процессов.

Показывается, что при одном из следующих условий: 1) $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция и $|\varphi(0)-\varphi(1)|<1$, или 2) $\varphi(x)>\delta>0$ и $1-\varphi(x)>\delta>0$, или 3) $1-\varphi(x)=\lambda(x)+\mu$, где $\lambda+\mu\leqslant 1$, и либо $\mu>0$, либо $\lambda<1$ — распределение вероятностей сходится к предельному распределению, не зависящему от начального распределения вероятностей. В случае 2) при $\sigma<1-\alpha$ это распределение оказывается сингулярным распределением, сосредоточенным на некотором множестве типа канторовского.

Особо рассматривается случай $\varphi(x)\equiv x$. В этом случае предельное распределение сосредоточено в точках 0 и 1. Оно существенно зависит от начального распределения и может быть выражено через решение некоторого функционального уравнения. Доказательства проводятся в основном методами функционального анализа и основаны на кропотливом изучении оператора, сопряженного с оператором, действующим на функцию распределения положения системы при перемещении системы на единицу времени.

Примечание референта. Указанные доказательства могли бы быть значительно облегчены при помощи использования простых вероятностных соображений (например, леммы Бореля — Кантелли).

Р. Л. Добрушин

1863. **О стохастическом интеграле. Оттавиани** (Sull'integrale stocastico. Ottaviani Giuseppe), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 610—616 (итал.)

Делается ряд почти очевидных замечаний по поводу введенного Е. Е. Слуцким и Леви понятия стохастического интеграла (см., например, РЖМат, 1954, 4503).

Р. Л. Добрушин

1864. **Ошибка, вызванная конечностью интервала интегрирования при определении автокорреляционных функций. Бласселъ** (Erreur due à une durée d'intégration finie dans la détermination des fonctions d'autocorrélation. Blassel Pierre), Ann. télécommuns, 1953, 8, № 12, 406—414 (франц.)

Пусть $f(t)$ — стационарный эргодический случайный процесс. Обычно приближенно полагают для достаточно большого T

$$Mf(t)f(t+\tau)\simeq\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)f(t+\tau)\,dt.$$

В работе показано, что средняя квадратическая ошибка этого приближенного равенства равна

$$\left[\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\nu}{2T}\right)\varphi(\nu)\,d\nu\right]^{1/2}, \qquad (1)$$

где

$$\varphi(\nu)=M\{f(t)f(t+\tau)[f(t+\nu)f(t+\nu+\tau)-f(t)f(t+\tau)]\}$$ (τ предполагается фиксированным).

Например, если $\varphi(\nu)=\sigma^4\exp[-2|\nu|/\theta]$, то средняя квадратическая ошибка с ростом T убывает, как $1/\sqrt{T}$.

Примечание референта. Оценка (1) средней квадратической ошибки, вызванной конечностью интервала интегрирования при определении автокорреляционных функций, известна (см., например, Davenport W. B., Jr., Jonson R. A., Middleton D., J. Appl. Phys., 1952, 23, № 4, 377—388).

В. М. Семенов

1865. **Новая форма статистического постулата квантовой механики. Винер, Зигель** (A new form for the statistical postulate of quantum mechanics. Wiener Norbert, Siegel Armand), Phys. Rev., 1953, 91, № 6, 1551—1560 (англ.)

Вместо волновой функции $\varphi(x,t)$, задающей в квантовой механике состояние системы, авторы предлагают рассматривать случайный процесс

$$\psi(\alpha,t)=\int\varphi(x,t)\,d\overline{X}(\alpha,x),$$

где $X(\alpha,x)$ — гауссовская случайная функция x с независимыми однородными приращениями (функция Винера); аргумент α указывает элемент пространства «элементарных событий», над которым задана вероятностная мера. Показывается, что эволюции волновой функции $\varphi(x,0)\to\varphi(x,t)$ согласно уравнению Шредингера соответствует переход $\psi(\alpha,0)\to\psi(\alpha,t)=\psi(T^t\alpha,0)$, порождаемый группой T^t сохраняющих меру точечных преобразований в пространстве значений α. «Наблюдаемой величине» $\mathfrak{R}$ (т. е. оператору $\boldsymbol{R}$ в гильбертовом пространстве функций $\varphi(x)$) авторы сопоставляют случайную величину $R(\alpha)$ такую, что функция распределения $R(\alpha)$ точно совпадает с функцией распределения возможных значений величины $\mathfrak{R}$; при этом, однако, величина $R(\alpha)$ определяется неоднозначно, и выбор какой-либо такой величины содержит значительную долю произвола. Обсуждается ряд возможностей выбора величины $R(\alpha)$.

А. М. Яглом

1866. **Квантовые распределения в пространстве приращений для волновой функции, зависящей от спина. Винер, Зигель** (Distributions quantiques dans l'espace différentiel pour les fonctions d'ondes dépendant du spin. Wiener Norbert, Siegel Armand), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 25, 1640—1642 (франц.)

Результаты, полученные в предыдущей работе (см. реф. 1865), обобщаются на случай волновой функции $\varphi(R,\sigma,t)$, зависящей, кроме пространственных координат R и времени t, еще и от дискретного аргумента σ («спина»).

А. М. Яглом

1867. **Случайное блуждание с последействием и внешним смещением. Патлак** (Random walk with persistence and external bias. Patlak Clifford S.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 3, 311—338 (англ.)

Рассматривается случайное блуждание в трехмерном пространстве, при котором движущаяся частица в случайные моменты времени меняет слу-

чайным образом направление и скорость своего движения. В промежутках между поворотами частица движется равномерно и прямолинейно. Предполагается, что направление движения частицы после поворота является случайной величиной, зависящей от ее направления до поворота, и что блуждание является неоднородным, т. е. его параметры (распределение вероятностей направления движения, его скорости и времени между поворотами) зависят от точки пространства, в которой находится частица.

В предположении, что смещение за один шаг весьма мало, выводится дифференциальное уравнение процесса, оказывающееся уравнением в частных производных четвертого порядка. Рассматриваются приложения к теории диффузии и теории цепных молекул. В статье приводится обширная (около 50 названий) аннотированная библиография работ по приложениям теории случайных блужданий к физике (броуновское движение, диффузия, цепные молекулы) и биологии. *Р. Л. Добрушин*

1868. **Различие в численности между разновидностями, растущими в соответствии с простым процессом размножения и гибели.** Дарвин (Population differences between species growing according to simple birth and death processes. Darwin J. H.), Biometrika, 1953, 40, ч. 3, 4, 370—382 (англ.)

Процесс размножения и гибели — марковский процесс со счетным числом состояний $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, заданный системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \alpha_{i-1}(t)\,p_{i-1}(t) + \beta_{i+1}(t)\,p_{i+1}(t) - [\alpha_i(t) + \beta_i(t)]\,p_i(t), \quad i = 1,2,\ldots,n,\ldots,$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \beta_1(t)\,p_1(t) - \alpha_0(t)\,p_0(t),$$

где $p_i(t)$ — вероятность того, что система в момент t находится в состоянии E_i, и $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ — характеризующие процесс плотности вероятностей перехода $E_i \to E_{i+1}$, $E_i \to E_{i-1}$ (вероятностей рождения и гибели).

В первой части статьи устанавливаются условия, которые надо наложить на $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, чтобы распределение вероятностей $\{p_i(t)\}$ принадлежало при любом t к заданному классу распределений (например, биномиальных, отрицательно-биномиальных и т. п.).

Во второй части работы, в связи с одной биологической задачей, вводится следующий более общий марковский процесс. Состояния этого процесса характеризуются наборами чисел $(m_1, \ldots, m_N)$, $m_i = 1, 2, \ldots$; $N = 1, 2, \ldots$ Если система находится в момент t в состоянии $(m_1, \ldots, m_N)$, то это значит, что в совокупности содержится в этот момент m_i особей i-й из N существующих в этот момент разновидностей. При этом за время dt с вероятностью $(m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\,Rdt$ появляется особь новой $(N+1)$-й разновидности ($R = \text{const}$). После появления первой особи новой разновидности, дальнейшее развитие этой разновидности происходит по описанному выше процессу размножения и гибели независимо от развития остальных разновидностей. При различных предположениях о вероятностях рождения и гибели $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ изучаются соответствующие этому процессу вероятности, моменты и их предельное поведение. *Р. Л. Добрушин*

1869. **Результаты наблюдения и их вероятности априори и афортиори.** Мачинский (Résultats d'observation et leurs probabilités a priori et a fortiori. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 19, 1861—1863 (франц.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1870. **О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики.** Гихман И. И., Укр. матем. ж., 1953, 5, № 4, 413—433

Излагается доказательство ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1954, 3020). Кроме того, во второй части работы изучается видоизменение предложенного А. Н. Колмогоровым критерия согласия между эмпирическими данными и заданной («теоретической») функцией распределения $F(x, \theta)$, зависящей от параметра $\theta = (\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^m)$, который определяется по результатам наблюдений.

Разобьем прямую $-\infty < x < +\infty$ на n интервалов, назовем их интервалами группировки; пусть $F_i(\theta)$ — вероятность того, что случайная величина примет значение, лежащее в первых i интервалах, а $\overline{F}_i$ — эмпирическое распределение, построенное по N (сгруппированным) наблюдениям. Далее, пусть истинное значение параметра равно θ_0, а $\overline{\theta}$—эмпирическое значение параметра, определенное по N' наблюдениям.

Если эмпирическая функция распределения и оценка параметра θ построены по двум рядам независимых наблюдений, то имеет место теорема:

Пусть 1) при $N \to \infty$ и $N/N' \to \delta_0^2$ величина $\sqrt{N'}\,(\overline{\theta} - \theta_0)$ слабо сходится к некоторому пределу, 2) функция $F(x, \theta)$ непрерывна по x и обладает непрерывными ограниченными частными производными по θ до второго порядка. Тогда условная вероятность совместного выполнения неравенств

$$\ldots < \sqrt{N}\,\{\overline{F}_i - F(\overline{\theta})\} < b, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

при гипотезе $\sqrt{N'}\,(\overline{\theta} - \theta_0) = z_{N'}$, где $z_{N'}$ сходится по вероятности к z, стремится к $u_0(0,0)$.

Здесь $u_0(\tau, x) = \lim_{T \to \infty} u_T(\tau, x)$; $u_T(\tau, x)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

в области, ограниченной прямыми $\tau = 0$, $\tau = T$ и кривыми

$$x = x_1(\tau) = (1+\tau)\,[a + \delta_0(z;\ q(\tau/(1+\tau)))]$$

и

$$x = x_2(\tau) = (1+\tau)\,[b + \delta_0(z;\ q(\tau/(1+\tau)))],$$

обращающееся в нуль на этих кривых и равное единице при

$$\tau = T,\ x_1(T) < x < x_2(T);$$
$$q(t) = \partial F(x(t), \theta)/\partial\theta;$$

$x(t)$ — функция, обратная к $t = F(x, \theta_0)$; $(\theta_1;\ \theta_2)$ — скалярное произведение двух m-мерных величин.

Рассмотрен также более сложный случай, когда эмпирическая функция распределения и оценка параметров θ получены по одним и тем же результатам наблюдений. *В. С. Королюк*

1871. Таблицы для непараметрического метода проверки расхождения двух выборочных распределений. Розенбаум (Tables for a nonparametric test of dispersion. Rosenbaum S.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 663—668 (англ.)

В качестве непараметрического критерия принадлежности двух независимых выборок объемов m и n одному и тому же непрерывному распределению рассматривается число членов первой выборки, лежащих вне интервала между наименьшим и наибольшим значениями второй выборки. Для вероятности Π_r того, что это число не превосходит r, имеем:

$$\Pi_r = \sum_{i=0}^{i=r} n(n-1)\binom{m}{i} B(n+m-1-i,\ i+2)$$

(Wilks S. S., Ann. Math. Statistics, 1942, **13**, 400—409).

Для объемов выборок m, $n = 1, 2, \ldots, 50$ указываются значения r такие, что r или больше членов первой выборки лежат вне указанного интервала с вероятностью, меньшей 5% и 1%. Для больших и почти равных n и m 5% верхний предел равен 7, а 1% — 10. Следует отметить, что аналогичный критерий был предложен В. И. Романовским (Тр. Второго Всесоюзного Совещания по математической статистике, Ташкент, 1949). *Н. В. Смирнов*

1872. Замечание к статье Г. А. Миллера «Марковские процессы с конечным числом состояний в психологии». Гудман (A further note on «Finite Markov processes in psychology». Goodman Leo A.), Psychometrika, 1953, **18**, № 3, 245—248 (англ.)

В статье Миллера (Miller G. A., Psychometrika, 1952, **17**, 149—167) методом наименьших квадратов находится оценка для вероятностей перехода, соответствующих конечномерному марковскому случайному процессу с дискретным временем. Автор предлагает новый способ доказательства результата Миллера, заключающегося в следующем. Производятся последовательные испытания, в каждом из которых может произойти одно из a альтернативных событий $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_a$. Независимые серии по n таких испытаний осуществляются много раз. Пусть m_{ik} — частота осуществления события ε_i в k-ых испытаниях этих серий. Пусть $M = \| m_{ik} \|$, $i = 1, \ldots, a$, $k = 1, \ldots, n-1$; $N_i = \| m_{ik} \|$, $k = 2, \ldots, n$. Пусть t_{ij} — вероятность осуществления i-го события в данном испытании при условии, что в предыдущем испытании осуществилось j-е событие; $T_i = \| t_{ij} \|$, $j = 1, \ldots, a$. Тогда оценка $\overline{T}_i$ для T_i, которая обращает в минимум выражение $C_i C_i'$, $C_i = T_i M - N_i$, имеет вид $\overline{T}_i = N_i M' (MM')^{-1}$, и числа $\overline{t}_{ij}$ образуют стохастическую матрицу. Вслед за Миллером автор отмечает, что для оценки вероятностей перехода более удобно использовать наблюденные частоты перехода, а не частоты осуществления альтернативных событий. *А. С. Монин*

1873. Абсолютный центральный момент первого порядка для распределения Полиа. Козневская (Pierwszy absolutny moment centralny dla rozkładu pólyi. Koźniewska I.), Zastosow. mat., 1954, **1**, № 3, 206—211 (польск.; резюме русс., англ.)

1874. Мощность критерия Уилкоксона однородности двух выборок. Сандрум (The power of Wilcoxon's 2-sample test. Sundrum R. M.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **15**, № 2, 246—252 (англ.)

Пусть $X_1, \ldots, X_m$; $Y_1, \ldots, Y_n$ — две случайные выборки. Критерий Уилкоксона однородности двух выборок основан на статистике U:

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij},$$

где

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < Y_j, \\ 0, & \text{если } X_i > Y_j. \end{cases}$$

Пользуясь нормальной аппроксимацией закона распределения U, автор приводит график функции мощности критерия Уилкоксона ($m = n = 10$) в случаях, когда альтернативные распределения нормальны (с одинаковой дисперсией) или равномерны на интервалах $(0,1)$ и $(\Delta, 1+\Delta)$. При этом погрешность, связанная с использованием нормального приближения распределения величины U, не учитывается.

В разделе «Верхняя граница дисперсии U» автор недостаточно отчетливо различает понятия вероятности события и эмпирической оценки этой величины. *И. И. Гихман*

1875. Последовательный анализ с тремя возможными гипотезами относительно неизвестной вероятности. Бур (Sequential test with three possible decisions for testing an unknown probability. Boer J. De), Appl. Scient. Res., 1953, **B3**, № 4—5, 249—259 (англ.)

Собел и Вальд (Sobel M., Wald A., Ann. Math. Statistics, 1949, **20**, 502) для определения принадлежности неизвестного среднего нормального распределения одному из трех интервалов действительной оси развили метод последовательного анализа, основанный на одновременном применении двух простых методов последовательного анализа (с двумя гипотезами).

Автор переносит этот метод на случай, когда определяется принадлежность неизвестной вероятности в схеме Бернулли одному из трех интервалов отрезка $[0,1]$. Рассматривается также «усеченный» метод, заключающийся в том, что заранее задается верхняя грань для числа испытаний.

На числовых примерах изложенный метод сравнивается с классическим (с фиксированным объемом выборки). При том же уровне значимости число испытаний при применении последовательного анализа, как правило, значительно меньше, чем в случае применения классического анализа. *В. С. Королюк*

1876. Последовательный анализ для гипотезы о близости параметра биномиального распределения к данному значению. Мерик (Test progressif de l'hypothèse que le paramètre d'une loi binomiale est voisin d'une valeur donnée. Méric Jean), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 22, 1390—1392 (франц.)

Изложен метод последовательного анализа для выбора между тремя гипотезами, определяющими принадлежность неизвестной вероятности в схеме Бернулли одному из трех интервалов отрезка [0,1].

Более подробная разработка вопроса дана в работе Бура (см. реф. 1875). *В. С. Королюк*

1877. Масштабные множители и степени свободы для χ-аппроксимации ранга в выборках небольшого объема. Томсон (Scale factors and degrees of freedom for small sample sizes for χ-approximation to the range. Thomson George W.), Biometrika, 1953, **40**, № 3—4, 449—450 (англ.)

Пусть $\overline{w}_{m,n}$ — среднее значение m рангов, вычисленных по m независимым выборкам (каждая объема n) из нормальной совокупности. Патнаик (Patnaik P. B., Biometrika, 1950, **37**, 78) предложил аппроксимацию вида

$$\overline{w}_{m,n}/\sigma \sim c\chi/\sqrt{\nu},$$

где c — соответствующий масштабный множитель, а ν — число степеней свободы χ-распределения.

Автор составил новую таблицу для c и ν при $m = 1$ и n от 2 до 10 и утверждает, что полученная при этом точность аппроксимации выше, чем у Патнаика. *В. С. Михалевич*

1878. Метод максимума правдоподобия и теория «функций решения» Вальда. Вольфовиц (The method of maximum likelihood and the Wald theory of decision functions. Wolfowitz J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, A56, № 2, 114—119; Indagationes math., 1953, 15, № 2, 114—119 (англ.)

Задача статьи заключается в том, чтобы на основе теории Вальда объяснить факт асимптотической эффективности оценок наибольшего правдоподобия. Не приводя строгих формулировок и доказательств, автор рассматривает следующее предложение. Пусть $f(x, \theta)$ — плотность распределения величины x, зависящая от случайного параметра θ с априорной плотностью $g(\theta)$; θ_0 — фиксированное значение параметра, при котором произведена выборка объема n. Тогда, при обычных условиях регулярности, накладываемых на функции $f(x, \theta)$ и $g(\theta)$ для $n \to \infty$ стремится к единице вероятность (отвечающая вероятностной мере с плотностью $\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0)$) того, что апостериорная плотность $h_g(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (которая, как функция $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является случайной функцией) асимптотически близка к нормальной плотности с средней $\hat{\theta}$ и дисперсией $\{nc(\theta)\}^{-1}$, причем $\hat{\theta}$ — оценка наибольшего правдоподобия для θ и

$$c(\theta) = \int \left(\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 f(x, \theta)\, dx.$$

Показывается, что из этого предложения вытекает асимптотически равномерная эффективнось (в классическом смысле) оценок $\hat{\theta}$. В конце статьи приводятся эвристические соображения автора относительно проблемы Неймана об оценке параметра θ в функции распределения $F(x; \theta, \alpha)$, если данные выборки представляют бесконечную последовательность серий из $n_1, n_2, \ldots$ наблюдений; параметр θ сохраняет фиксированное значение во всех сериях, а α меняется от серии к серии. *Н. В. Смирнов*

1879. Определение полного числа наблюдений выборки для одной схемы двукратной выборки. Китагава, Китахара, Номати, Ватанабе (On the determination of sample size from the two sample theoretical formulation. Kitagawa Tosio, Kitahara Teisuke, Nomachi Yukio, Watanabe Nobuo), Bull. Math. Statist., 1953, **5**, № 3—4, 35—45 (англ.)

1880. Случайные числа. Зия-эд-Дин, Мойнэд-Дин (Random sampling numbers. Ziaud-Din M., Moin-ud-Din Siddiqi M.), Proc. Second Pakistan Statistical Conference, Univer sity of Dacca, 1952, January, 91—98, Lahore, 1953 (англ.)

1881. Асимптотическая эквивалентность распределений, полученных при рандомизации и нормальных распределений. Силви (The equivalence of asymptotic distributions under randomisation and normal theories. Silvey Samuel D.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, 139—147 (англ.)

1882. Последовательный выбор. Оуэнс (Sequential work sampling. Owens Berl W.), Trend Engng Univ. Wash., 1954, **6**, № 1, 23—27 (англ.)

1883. Геометрические конфигурации, приводящие к планам с частично сбалансированными неполными блоками. Клатуэрти (A geometrical configuration which is a partially balanced incomplete block design. Clatworthy Willard H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 47—55 (англ.)

1884. Прямоугольные решетчатые и ортогональные, делимые на группы, планы. Мохон-Рой (Rectangular lattices and orthogonal group divisible designs. Mohon Roy Purnendu), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1954, **5**, № 18, 87—98 (англ.)

1885. Задача о составлении пар. Хаяси, Акаике (On a matching problem. Hayashi Chikio, Akaike Hirotugu), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1953, **4**, 55—64 (англ.)

1886. Замечание о неприведенных планах с неполными блоками. Мохон-Рой (A note on the unreduced balanced incomplete block designs. Mohon Roy Purnendu), Sankhya, 1953, **13**, ч. 1, 2, 11—16 (англ.)

1887. Последовательное различение. Маллоус (Sequential discrimination. Mallows C. L.), Sankhyā, 1953, **12**, ч. 4, 321—338 (англ.)

1888. **Об оценке среднего значения стационарного стохастического процесса.** Кудо (Note on the estimation of the mean value of the stochastic process. Kudô Akio), Bull. Math. Statist., 1953, 5, № 3—4, 53—58 (англ.)

1889. **Некоторые несмещенные оценки для одного вида двустепенного выбора.** Санделиус (Some unbiased estimates for a type of two-phase sampling. Sandelius Martin), Kgl. lantbrukshögskolans ann., 1953, 19, 113—126 (англ.)

1890. **Некоторые результаты в теории выборочного метода для случая, когда объекты выбираются с неравными вероятностями.** Дербин (Some results in sampling theory when the units are selected with unequal probabilities. Durbin J.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, 15, № 2, 262—269 (англ.)

1891. **Некоторые нерешенные задачи экспериментального планирования.** Наир (Some unsolved problems in experimental designs. Nair K. R.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1953, 4, № 16, 156—160 (англ.)

1892. **О выравнивании кривых, заданных параметрически.** Штанге (Über das Ausgleichen von Kurven in Parameterdarstellung. Stange K.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 5—6, 212—213 (нем.)

Пусть

$$G(x, t \mid A, B, \ldots) = 0, \quad H(y, t \mid A, B, \ldots) = 0$$

— параметрические уравнения некоторой кривой, не имеющей особых точек, причем вид функций G и H известен и лишь неизвестны параметры $A, B, \ldots$ Решается задача оценки этих параметров по наблюденным значениям (x_ν, y_ν) координат точек (x_ν^*, y_ν^*), лежащих на искомой кривой. Предполагается, что (x_ν, y_ν) — нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием (x_ν^*, y_ν^*) и заданной матрицей вторых моментов, являющихся функциями от x и y. Искомые оценки параметров $A, B, \ldots$ определяются путем линеаризации заданных уравнений с последующим применением способа наименьших квадратов. В качестве примера рассматривается задача оценки радиуса циклоиды. *Л. Н. Большев*

1893. **Теоремы о квадратичных формах и соответствующих матрицах.** Вайда (Theorems relating to quadratic forms and their discriminant matrices. Vajda S.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, 10, сер. 2, 13—15 (англ.)

В статье автора (Suppl. J. Roy. Statist. Soc., 1947, 9, 141) изучено выборочное распределение вероятностей для выражения $Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ca_i)^2$, где $c = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$, а y_i — результаты независимых измерений нормальной случайной величины с единичной дисперсией. Указанное выражение распределено так же, как $\sum_i l_i z_i$, где z_i имеют распределения χ^2 с одной степенью свободы, а l_i — характеристические корни матрицы, соответствующей квадратичной форме Q. Условие $\sum_i a_i b_i = 1$ оказывается необходимым для того, чтобы Q имело распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы. Это условие выполняется в том и только том случае, если b_i определяются по методу наименьших квадратов.

В настоящей статье рассматривается более общий случай $Q = (y - Ac)'(y - Ac) = y'M'My$, где y — матрица-столбец порядка n, составленная из независимо измеренных значений нормальной случайной величины с единичной дисперсией; A — заданная матрица порядка $n \times m$ и ранга m; $c = By$, где B — матрица порядка $m \times n$; $M = I - AB$, где I — единичная матрица порядка n. Доказывается, что существует лишь единственный способ выбрать матрицу B так, чтобы Q имело распределение χ^2 с $n-m$ степенями свободы. Именно, следует определить B по методу наименьших квадратов, обращая в минимум выражение $Q = y'M'My$. Соответствующее решение имеет вид $B = (A'A)^{-1}A'$. На языке алгебры этот результат дает способ определения матрицы B, при которой матрица $M = I - AB$ имеет m характеристических корней, равных нулю, и $n-m$ корней, равных единице. *А. С. Монин*

1894. **О системах дифференциальных уравнений и системах линейных уравнений, возникающих при разложении совокупностей.** Буркхардт (Über Systeme von Differentialgleichungen und linearen Gleichungen, die bei der Zerlegung von Gesamtheiten entstehen. Burkhardt Felix), Ber. Mathematiker-Tagung. Berlin, 1953, 219—225 (нем.)

1895 К. **Введение в статистику.** Гёдикке (Introduction to the theory of statistics. Goedicke Victor, XII+286 pp., New York, Harper, 1953, 4.50 doll.), Scient. Monthly, 1953, 76, № 6, 363 (библ.)

ТЕОРИЯ ИГР

1896. **Некоторые функциональные уравнения теории динамического программирования.** Беллман (Some functional equations in the theory of dynamic programming. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 10, 1077—1082 (англ.)

По поводу термина «динамическое программирование» см. РЖМат, 1953, 1226. Без доказательства приводятся теоремы разного характера (существование и единственность решения, иногда сведение к более простому уравнению) для некоторых функциональных уравнений экстремального характера. Для примера приводим одно из них:

$$f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x - y) + f(ay + b(x - y))],$$

где f — искомая, g и h — заданные функции, a и b — постоянные.

При некоторых условиях утверждается, что для решения максимум достигается при $y = x$. Доказательства будут приведены в книге «Введение в теорию динамического программирования» (An introduction to the theory of dinamic programming), которая скоро выйдет в свет. *М. К. Гавурин*

1897 К. **Теория игр и экономическое поведение.** Нейман, Моргенштерн (Theory of games and economic behavior. Neumann

John von, Morgenstern Oskar, 3-rd ed., XX+641 pp., tables, diagrs, bibliog., London, Princeton U. P., 1953, 80 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 211,10 (библ.)

1898 К. **Дополнения к теории игр. Кун, Таккер** (Contributions to the theory of games. Kuhn H. W., Tucker A. W., VIII+ +395 pp., Princeton, Princeton University Press., 1953, 4.00 doll.), Scient. Monthly, 1953, 76, № 6, 363 (библ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

1899. **О вероятностях гипотез в технике телепередач и измерений. Лёб** (La probabilité des causes dans la technique des télécommunications et des mesures. Loeb Julien), Ann. télécommuns, 1954, 9, № 1, 15—19 (франц.)

Популярная детальная трактовка теоремы Бейеса как в дискретном, так и в непрерывном случае. В виде иллюстрации рассматривается несколько примеров весьма элементарного характера из теории информации. В ряде вопросов соображения автора представляются референту неубедительными. *А. Я. Хинчин*

1900. **Вычисление оценок точности результатов сравнения стандартных мер по методу графического квадрата. Джайлет, Уотсон** (Calculation of accuracy of results of graphical square intercomparisons. Gilet P. M., Watson G. S.), Austral. J. Phys., 1953, 6, № 2, 155—170 (англ.)

Рассматриваются две схемы обработки поверочных измерений для сравнения стандартных мер длины, массы и других величин, а также результатов калибровки шкал. По методу наименьших квадратов устанавливаются «наилучшие» оценки уклонения от номинала и средние квадратические погрешности рассматриваемых характеристик. *Н. В. Смирнов*

1901. **О статистических оценках в физике. Аннис, Честон, Примаков** (On statistical estimation in physics. Annis M., Cheston W., Primakoff H.), Revs Mod. Phys., 1953, 25, № 4, 818—830 (англ.)

Рассматриваются известные методы оценки параметра распределения: метод, основанный на знании априорного распределения параметра и формуле Бейеса, и метод максимального правдоподобия. Подчеркивается, что в ряде физических задач априорное распределение параметра бывает известным или может быть определено эмпирически. Приведено значительное число примеров, взятых из теории космических лучей. *И. И. Гихман*

1902. **Применение методов математической статистики в гидрологии. Абаджиев** (Приложение на метода на математичната статистика в хидрологията. Абаджиев С.), Хидрология и метеорология, 1953, № 4, 21—41 (болг.)

1903. **Контроль хода производства по двум признакам. Камалов М. К.**, Докл. АН УзССР, 1954, № 4, 3—5 (резюме узб.)

Пусть (x_i, y_i) — независимые наблюдения нормальных, коррелированных случайных величин x и y и пусть $z = xy$. Автор указывает распределение случайных величин

$$\theta = \sum \bar{z}_i = \sum x_i y_i \text{ и } t = (z - z_0)/\sigma(\bar{z}),$$

где $z_0 = Mz$, $\sigma^2(\bar{z}) = D\bar{z}$, $\bar{z} = \theta/n$, а также доверительные интервалы для z. *Л. Н. Большев*

1904. **О применении статистических методов и распределений при исследованиях в электромашиностроении. Оттерсон** (Über die Anwendung von Statistischen Methoden und Prüfverteilungen bei Untersuchungen im Elektromaschinenbau. Otterson Klaus), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 213—218 (нем.)

На основе t-распределения излагается известный метод оценки среднего значения по n независимым наблюдениям нормально распределенной случайной величины. *Л. Н. Большев*

См. также: 1836, 1980 РЕЦ

ГЕОМЕТРИЯ

1905. **Влияние геометрии Бойаи-Лобачевского на развитие геометрии. Варга** (A Bolyai-Lobacsevszkij geometria hatása a geometria fejlodesere. Varga Ottó), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, 3, № 2, 157—171 (венг.)

Доклад, прочитанный на заседании торжественной сессии Венгерской академии наук 15 декабря 1952 г. Дается краткий обзор развития геометрии под влиянием открытия геометрии Лобачевского. Вначале рассматривается аксиоматическое направление, а именно, приведены исследования Гильберта по основаниям геометрии (Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, М.— Л., 1948). Далее автор переходит к работам Кели и Клейна по обоснованию неевклидовых геометрий через проективную. При этом цитируются работы по аксиоматике проективной геометрии, в частности Л. С. Понтрягина. Далее указана литература, относящаяся к обоснованию геометрии с точки зрения теории групп. Автор подробно останавливается на работе Гильберта «Об основаниях геометрии» (Hilbert D., Math. Ann., 1903, 56, 381—422).

Большое место в работе занимают идеи Римана (Riemann B., Göttingener Abh., 1866, 13) и их современного развития. В этой связи упоминаются работы Гельмгольца, Ли, Риччи, Леви-Чивита и Кристофеля. В конце статьи автор переходит к обзору работ по геометрии путей и по геометрии аффинной связности (Г. Вейль, Эйзенхарт и др.). Упоминается исследование В. Ф. Кагана по субпроективным пространствам; работы Финслера, Бервальда и самого автора.

Библиография, 48 названий. *Л. С. Атанасян*

1906. О некоторых построениях в пространстве Лобачевского с помощью одной только линейки. Демаховская Р. И., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1953, **12**, 130—142

Н. П. Хоменко (Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1950, **10**, 141—145) и А. С. Смогоржевский (Геометрические построения в плоскости Лобачевского, Гостехиздат, М.— Л., 1951, 110—123) доказали, что любая квадратно-радикальная конструктивная задача может быть решена одной линейкой, если в плоскости чертежа дана «окружность» с ее «центром» и пара параллельных прямых. «Окружность» здесь обозначает одну из трех модификаций окружности пространства Лобачевского, т. е. либо собственную окружность, либо гиперцикл, либо орицикл; в двух последних случаях под «центром» понимается соответственно база эквидистанты или ось орицикла.

Автор показывает, что к указанной конфигурации может быть приведена при помощи одной линейки конфигурация из двух неконцентрических «окружностей», если задан «центр» одной из них.

Н. М. Несторович

1907. Центральное ребро, центральная плоскость, центр ребер угла. Надь (Mittelkante, Mittelebene, Mittelpunkt von Kanten einer Ecke. S z.-Nagy Gy.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 161—165 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Рассматриваются исходящие из фиксированной точки O полупрямые OA_k ($k = 1, \ldots$) — ребра угла O (A_k — произвольные, отличные от O точки ребер), на которых откладываются единичные векторы $\mathbf{OE}_k$. Строится $\mathbf{OM} = \Sigma_{k=1}^{n} \mathbf{OE}_k$. Полупрямая OM называется центральным ребром ребер OA_k; проходящая через O нормально центральному ребру плоскость — центральной плоскостью ребер. Если M совпадает с O, то n ребер OA_k имеют центр (центрированы); в этом случае центральное ребро и центральная плоскость не определены.

Два ребра центрированы, когда они противоположно направлены. Угол между двумя непротивоположными ребрами делится их центральным ребром пополам. Если три ребра центрированы, то концы их единичных векторов являются вершинами равностороннего треугольника; если центрированы четыре ребра, то концы их единичных векторов — вершины равностороннего тетраэдра (у равностороннего тетраэдра равны противоположные ребра, грани имеют равные площади); верно и обратное. Сумма квадратов ребер равностороннего тетраэдра равна учетверенному диаметру описанной сферы.

Сумма расстояний точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ до вершины O меньше чем для любой другой точки центральной плоскости; если ребра OA_k центрированы, то это экстремальное свойство сохраняется по отношению к любой точке пространства.

На основе полученных результатов доказывается следующая теорема Штейнера (Steiner J., Gesammelte Werke, B. II, Berlin, 1882; J. reine und angew. Math., 1835, **15**, 373), высказанная последним без доказательства: Пусть O — фиксированная точка, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — заданные плоскости и $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — данные действительные числа; тогда плоскости, проходящие через O и образующие с плоскостями P_k углы α_k ($k = 1, \ldots, n$) такие, что сумма $\Sigma_{k=1}^{n} q_k \cos \alpha_k = S$ сохраняет постоянное значение, касаются некоторого кругового конуса; все конусы, получающиеся при различных значениях S, имеют общую ось.

А. Г. Школьник

1908. Одна теорема о множествах точек. Баласубраманьян (A theorem on sets of points. Balasubramanian N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, **19**, № 6, 839 (англ.)

Статья касается работы Гупта (Gupta H., РЖМат, 1954, 1777) о неконциклических множествах точек. Автор получает следующий усиленный результат: если множество из n точек на плоскости таково, что окружность, проходящая через одну фиксированную точку множества и две его любые точки, содержит еще и четвертую точку того же множества, то все точки множества лежат на одной окружности. Теорема немедленно получается из соответствующего предложения Сильвестра — Грюнвальда о принадлежности множества точек одной прямой путем инверсии, переводящей фиксированную точку множества в бесконечно удаленную.

В. В. Рыжков

1909. Площадь четырехугольника в функции сторон. Лампарьелло (Area di un quadrilatero in funzione dei lati. Lampariello Agostino), Period. mat., 1953, **31**, № 5, 314—317 (итал.)

Даны простой вывод известной формулы для площади произвольного четырехугольника и один из возможных вариантов геометрического вывода частного случая этой формулы для четырехугольника, вписанного в круг. Встречаются явные описки.

С. Д. Россинский

1910. Пересечение линейного подпространства с положительной координатной областью. Дэвис (The intersection of a linear subspace with the positive orthant. Davis Chandler), Michigan Math. J., 1952, **1**, № 2, 163—168 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматриваются линейные отображения евклидова пространства на пространство меньшей размерности. Исследуется пересечение полученного пространства с областью, где все координаты неотрицательны.

Н. М. Бескин

1911. Что радует наш взор в золотом сечении? Тейс (Woher rührt unser Wohlgefallen am Goldenen Schnitt? Theis Erich), Studium gen., 1953, **6**, № 9, 502—506 (нем.)

Отношение двух отрезков p и q в золотом сечении равно приблизительно 0,618. Если отношение площадей двух подобных прямоугольников равно $1 : e$ (e — основание натурального логарифма), то отношение их сходственных сторон $1 : \sqrt{e} \approx 0{,}607$.

Автор приходит к выводу, что золотое сечение только потому принято в изобразительном искусстве, что оно аппроксимирует отношение площадей фигур $1 : e$, и предлагает общепринятое отношение 1,000 : 0,618 заменить отношением $1{,}000 : 0{,}607 = \sqrt{e} : 1$.

З. А. Скопец

1912. Семейства тетраэдров и относящихся к ним фигур. Гитель (Familles de tétraèdres et figures apparentées. Guitel Geneviève-Gabrielle-Marie), Ann. Univ. Paris, 1953, **23**, № 4, 647—648 (франц.)

Тезисы диссертации (Paris, Faculté des Sciences, fasc. 2 des «Etudes pratiques d'accès à la recherche»).

Проводится классификация трехгранных углов, тетраэдров и пространственных углов из четырех лучей по числу и характеру их тупых или острых углов (плоских и двугранных). Например, существует 27 видов тетраэдров и 43 непрерывных перехода от одного их вида к другому с потерей ровно одного тупоугольного элемента. *В. А. Залгаллер*

1913. Некоторые методы построения кривых второго порядка и их инверсных образов. Бугров Я. С., Сб. студ. науч. работ Благовещенского гос. пед. ин-та, 1953, № 1, 33—49

Приведены общеизвестные свойства преобразования инверсии на плоскости. Исходя из свойств кривых второго порядка, автор изучает соответствующие свойства их инверсных образов, в частности, он указывает способы построения этих образов и касательной и нормали к ним.

Инверсным образом эллипса служит кривая четвертого порядка

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = \frac{a^2b^2}{r^4}(x'^2 + y'^2)^2$$

(автор называет ее овалом Кассини), параболы — циссоида Диоклесса, гиперболы — лемниската. В случае параболы дается способ построения, вытекающий из метода построения инверсного ее образа — циссоиды. В работе имеются опечатки.

М. А. Сабиров

1914 К. Курс плоской геометрии для диплома первой и второй степени университета и высших школ. Хюльтен-Каваллиус, Сендгрен (Plan geometri för ett och två betyg vid universitet och högskolor. Hylten-Cavallius Carl, Sendgren Lennart, 293 s., Malmö, Hermods korrespondensinst., 1953, 21), Svensk bokhandel, 1953, № 51, 908 (библ.)

1915 К. Аналитическая геометрия. Лея (Geometria analityczna. Leja Franciszek, 288 s., Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk, 1954, 22, 50 zł.), Przew. bibliogr., 1954, **10**, № 16, 197 (библ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

1916. Интегральные законы поля Прока-Юкава в интерпретации Боппа. Пателли (Leggi integrali del campo di Proca-Yukawa nell'interpretazione di Bopp. Pratelli Aldo M.), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 550—558 (итал.)

Формулируются интегральные законы мезонного поля Прока — Юкава и электромагнитного поля Боппа с помощью выражений для работы тензоров этих полей на замкнутой двумерной поверхности или для потока этих векторов через трехмерную поверхность, аналогичных соответственным выражениям для тензоров электромагнитного поля Максвелла. *Б. А. Ровенфельд*

1917. Инвариантная мембранная функция напряжения для оболочек. Лангхар (An invariant membrane stress function for shells. Langhaar H. L.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 2, 178—182 (англ.)

Доказывается, что тензор мембранного напряжения оболочки $T^{ij}(x^1, x^2)$ можно представить (инвариантно относительно системы координат) в виде:

$$T^{ij} = e^{im}e^{jm}F_{,mn} + g^{ij}\left(KF - \int F\,dK\right), \quad (1)$$

где F — скаляр, K — гауссова кривизна, g^{ij} — контравариантные составляющие метрического тензора g_{ij}, $e^{11} = e^{22} = 0$, $e^{12} = -e^{21} = g^{-1/2}$, g — детерминант матрицы (g_{ij}), $F_{,mn}$ — ковариантная производная второго порядка от F. Причем $F(x^1, x^2)$ — функция напряжения — удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, характеристиками которого являются асимптотические линии на оболочке.

Представление (1) общее в случае $K = \text{const}$, в противном случае (1) имеет место, когда $F = F(K)$.

Устанавливается также вид функции $F(x^1, x^2)$ для поверхностей вращения постоянной гауссовой кривизны. *С. А. Терсенов*

1918. К вопросу о приложении тензорного исчисления к теории оболочек. Кретнер (Beitrag zur Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Schalen. Krettner J.), Ingr-Arch., 1953, **21**, № 5—6, 339—343 (нем.)

Продолжая свой вывод с помощью тензорного исчисления основных формул теории упругости для оболочек (Ingr-Arch., 1953, **21**, 112—118; см. РЖМех, 1954, 2244), автор рассматривает основные геометрические тензоры, а также тензор искажения и тензор деформации самой оболочки и ее средней поверхности.

В качестве примера приведена цилиндрическая оболочка. *Ю. Н. Ястребов*

1919. Математическая основа единой таблицы различно ориентированных цилиндрических проекций. Хазаи (Különböző elhelyezésü szögtartó hengervetületek egységes táblázatának matematikai alapja. Házáy István), Földmerestani közl., 1953, **5**, № 2, 61—67 (венг.)

Рассматриваются конформные цилиндрические проекции поверхности земного сфероида на плоскости в целях применения их в геодезических и картографических работах для территории Венгрии. Отмечаются неудобства, которые имеют место в геодезических работах Венгрии, вследствие введения конформных цилиндрических проекций с наклонными осями, с тремя проекционными зонами, и делается предложение замены этих трехзональных систем координат одной системой. С этой целью предлагается составление специальной единой таблицы относительно вспомогательных меридианов и параллелей, которая может быть использована для цилиндрических проекций различных ориентировок. *М. Д. Соловьев*

1920. Кривые равного пробега. Кастро (Curvas de tiempos iguales. Castro Honorato de), Ciencia, 1953, **13**, № 4—6, 105—108 (исп.)

В сейсмологических исследованиях рассматривают кривые, представляющие распространение сейсмических возмущений за равные промежутки времени. В предположении, что скорость распространения не меняется с глубиной, известно, что такими кривыми являются эллипсы.

Автор рассматривает указанные кривые при изменении скорости с глубиной. Такие кривые задаются уравнениями

$$\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+(y-r_1)^2=R_1^2;\quad \left(x+\frac{s}{2}\right)^2+(y-r_2)^2=R_2^2;$$

где

$$r_i=\frac{v_0}{k}\operatorname{sh} kt_i;\ R_i=\frac{v_0}{k}(\operatorname{ch} kt_i-1),$$
$$i=1,2;\ t_1+t_2=T=\text{const}.$$

Элементарными рассуждениями выясняется, что кривые симметричны относительно оси y и пересекаются любой прямой не более чем в двух точках. Отсюда делается ошибочный вывод, что кривые являются алгебраическими кривыми второго порядка. *А. И. Нахимовская*

1921. Монография Е. С. Федорова о фигурах и ее значение для кристаллографии. (О монографии «Начала учения о фигурах».) Франк-Каменецкий В. А., Уч. зап. ЛГУ, сер. геол. н., 1954, 178, № 4, 8—22

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1922 К. Начертательная геометрия. Пьяццолла Белок (Geometria descrittiva. Piazzolla Beloch M., 2 a ed., XV + 172 + + 172 + 118 pp., Istituto di Geometria dell, Università di Ferrara, Ferrara, 1953) (итал.)

Книга базируется на курсе, прочитанном автором в университете Феррара. Она состоит из введения и 10 частей, соединенных в 3 отдельно пронумерованных раздела. Раздел первый содержит введение и части 1 и 2. Раздел второй — часть 3, а раздел третий — части 4—10. Во введении автор делает несколько общих замечаний о различных методах проектирования и рассматривает некоторые свойства кривых и поверхностей, а также некоторые основные положения проективной геометрии.

В первой части показывается, что объект в пространстве определяется двумя перспективами. Дается построение, позволяющее осуществить выполнение третьей перспективы по данной паре перспективных изображений. Цель автора заключается в том, чтобы использовать этот «фотограмметрический принцип» как основу для изучения начертательной геометрии. Этот подход по существу эквивалентен подходу, использованному Е. Мюллером и его школой (Müller E., Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. I, Deuticke, Leipzig-Wien, 1923).

Во второй части рассматриваются ортогональные проекции. Изображение точек, линий и плоскостей, так же как и основные построения, рассматриваются детально. Даются многочисленные примеры, которые используются для решения элементарно-графических задач пространственной геометрии. В третьей части говорится о применении метода ортогональной проекции для упражнения студента в наглядном представлении пространственных объектов. Изучаются конические сечения и их ортогональные проекции; изображаются многогранники и их пересечения с плоскостями и с другими многогранниками. После детального рассмотрения поверхностей вращения, переноса и винтовых поверхностей следует короткая глава о линейчатых поверхностях. Последний раздел посвящен весьма разнообразным темам: картографическая проекция (часть 4), центральная проекция (часть 5), аксонометрическая проекция (часть 6), тени (часть 7), применение картографической проекции (часть 8), линейная перспектива (часть 9), фотограмметрия (часть 10). Автор называет линейную перспективу аксонометрическим изображением объекта из конечного центра проекции.

Книга хорошо написана и содержит большое количество примеров, выполненных во всех деталях построения. Использование аналитической геометрии почти всегда избегается. Отлично выполненные фигуры воспроизведены плохо. Причина заключается в том, что книга печаталась с машинописной рукописи неудовлетворительным литографским способом в значительной степени в ущерб внешнему виду книги. Достойно сожаления отсутствие ссылок на литературу и алфавитного указателя. *E. Lukacs*

Перевод из Math. Revs, 1953, 14 ,№ 8, 785.

1923 К. Курс начертательной геометрии, системы изображения. Ласала-Мильяруэло, Маркос де Лануса (Curse de geometria descriptiva, sistemes de representacion. Lasala Millaruelo Jesus, Marcos de Lanuza Francisco, 446 p., Madrid, Editorial S. AE. TA, 1953), An. mec. y electr., 1953, **30**, № 3, 160 (библ.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1924. Образование алгебраической кривой четвертого порядка индекса 2 из кривых второго порядка. Надь (Ableitung einer algebraischen Kurve vierter Ordnung vom Index 2 aus Kegelschnitten. Sz.-Nagy Gy.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 166—168 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Индексом действительной плоской кривой называют минимальное число действительных точек, в которых эта кривая пересекается с произвольной прямой ее плоскости. Индекс плоской кривой 4-го порядка всегда равен 0 или 2 (если только кривая не вырождается в четверку прямых). В работе дается способ образования алгебраической кривой 4-го порядка индекса 2 с помощью конических сечений (ср. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей, II, М.—Л., ГТТИ, 1934).

Если $E=0$ и $H=0$ — уравнения эллипса и гиперболы, пересекающихся в точках A_1, A_2 (на одной ветви гиперболы) и A_3, A_4 (на другой ветви), а $e_1=0$, $e_2=0$ — уравнения двух эллипсов, проходящих через точку A_1 (A_3 и A_4 лежат вне эллипсов, A_2 вне e_1, но внутри e_2), то уравнение

$$EH+\lambda e_1e_2=0, \qquad (1)$$

где λ — достаточно малое положительное число, есть уравнение кривой 4-го порядка индекса 2, не сводящейся к кривым второго порядка. Если γ_{12}, γ_{23}, γ_{34}, γ_{41} — четыре дуги, образованные точками A_1, A_2, A_3, A_4 на эллипсе E, а δ_{12}, δ_{34}, $\delta_{1\infty}$, $\delta_{2\infty}$, $\delta_{3\infty}$, $\delta_{4\infty}$ — дуги, образованные этими же точками на гиперболе, то кривую (1) можно представить себе состоящей из трех ветвей Z_1, Z_2, Z_0, где Z_1 проходит в окрестности кривой, образуемой дугами $\delta_{1\infty}$, δ_{12}, γ_{23} $\delta_{3\infty}$, Z_2—

в окрестности кривой $\delta_{2\infty}, \gamma_{12}, \gamma_{41}, \delta_{4\infty}, Z_0$ — в окрестности кривой δ_{34}, γ_{31}. Ветви Z_1 и Z_2 — бесконечны, замкнуты (geschlossen) на бесконечности (каждая в отдельности), каждая из них пересекается с произвольной прямой по меньшей мере в одной точке и обе они проходят через точку A_1; ветвь Z_0 выпукла, замкнута и конечна. При некотором значении λ ветвь Z_0 вырождается в отдельную точку.

Н. И. Кованцов

1925. О плоских рациональных кривых 4-го порядка, инвариантных относительно трижды прямоугольной группы коллинеаций. Маркьонна (Sulle quartiche piane razionali invarianti per un gruppo trirettangolo di omografie. Marchionna Ermanno), Period. mat., 1953, **31**, № 4, 229—245 (итал.)

Рассматриваются некоторые характеристические свойства плоских рациональных кривых 4-го порядка (квартик), инвариантных относительно коллинеаций трижды прямоугольной группы (трижды прямоугольные квартики). Трижды прямоугольной группой называется нециклическая группа из 4 элементов, например группа плоских коллинеаций, состоящая из тождества и симметрий относительно прямоугольных декартовых осей и начала координат.

Показано, что эти кривые — единственные рациональные квартики, имеющие по крайней мере одну бифлекнодальную точку, т. е. двойную узловую точку с различными главными касательными, каждая из которых является инфлексионной (касательной в точке перегиба).

Трижды прямоугольные квартики принадлежат к двум следующим типам: 1) квартики с одной бифлекнодальной точкой и с двумя другими узловыми точками (возможно, также бифлекнодальными); 2) квартики с одной бифлекнодальной и с одной таснодальной точкой (точкой самоприкосновения). Второй случай является предельным для первого. Рациональные трижды прямоугольные квартики — единственные квартики, имеющие одну бифлекнодальную и две другие узловые точки (различные или бесконечно близкие).

Все квартики, имеющие одну бифлекнодальную и одну таснодальную точки, проективно-тождественны четырьмя различными способами. Модулями квартики с тремя узлами называются три двойных отношения, образуемых главными касательными каждого узла с прямыми, проектирующими два других узла. Две квартики, имеющие по бифлекнодальной точке и по двум различным узлам, проективно-тождественны, если модули, относящиеся к их бифлекнодальным точкам, равны между собою. Для бифлекнодальности одного из узлов неприводимой трижды прямоугольной квартики с тремя различными узлами необходимо и достаточно, чтобы модули, относящиеся к двум другим узлам, были равны —1.

Квартики с тремя бифлекнодальными точками называются октаэдрическими, как кривые, инвариантные относительно октаэдрической группы коллинеаций. Чтобы квартика, имеющая одну бифлекнодальную точку B и два других узла, была октаэдрической, необходимо и достаточно, чтобы модуль квартики относительно B был равен —1.

С. Д. Россинский

1926. Образцы некоторых алгебраических кривых, инвариантных относительно циклических инволюций периодов три, пять и семь. Хатчерсон, Гормсен (Maps of certain algebraic curves invariant under cyclic involutions of periods three, five and seven. Hutcherson W. R., Gormsen S. T.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 1, 92—98 (англ.)

В работе строится в пространстве S_5 образ F плоской инволюции, порожденной гомографическим преобразованием $T(x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : Ex_2 : E^2x_3,\ E^7 = 1)$. Рассматриваются семь инвариантных относительно T семейств кривых седьмого порядка C_i $(i = 0, \ldots, 6)$, одно из которых, C_0, пятипараметрическое. Из уравнений последнего определяется преобразование S_2 в S_5, дающее уравнение

$$F: \begin{Vmatrix} X_1X_2X_3 & X_0X_5 \\ \cdot & \\ X_2X_3X_4 & X^2_1 \end{Vmatrix} = 0$$

(в смысле равенства нулю всех определителей второго порядка). Изучаются особенности этой поверхности и поведение на ней кривых Γ_i, соответствующих кривым C_i.

Что касается инволюций периодов 3 и 5, указанных в заглавии, то авторы отсылают читателя к литературным источникам. При этом авторы не упоминают о работе Дессар, впервые исследовавшей инволюции седьмого порядка $x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : Ex_2 : E^ax_3$ $(a = 2, \ldots, 6)$ и построившей поверхности, их представляющие (Dessart J., Mém. Soc. roy. sci. Liège, 1932, (3), **17**, № 1, 1—16). *В. В. Морозов*

1927. О нейтральных полях, допускающих бирациональные преобразования в себя. Бенедикти (Sopra i campi neutri che ammettono trasformazioni birazionali in sè. Benedicty Mario), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 265—268 (итал.)

Заметка резюмирует результаты автора (Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1950, сер. 3, **4**, 153—173; Rend. di mat., 1952, (5), **11**, 411—433).

Нейтральным полем называется алгебраическая кривая C жанра p, на которой заданы δ_1 «нейтральных пар» точек и δ_2 «нейтральных двойных» точек. p называется эффективным, а $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ — виртуальным жанром поля. Бирациональным преобразованием нейтрального поля в себя называется бирациональное преобразование в себя кривой C, переводящее нейтральные пары в нейтральные пары и нейтральные двойные точки — в нейтральные двойные.

Для нейтральных полей имеет место теорема Шварца — Клейна: при $\pi > 0$ число бирациональных преобразований поля в себя конечно, за исключением случаев $p = \delta_1 = 0$, $\pi = \delta_2 = 2$. Кроме того, для порядка ν группы преобразований поля в себя имеют место следующие ограничения: 1) если $p = 0, \pi > 1$, то $\nu \leqslant 4\pi$; исключение представляют 7 полей, перечисляемых в работе; 2) если $p = 1$, $\pi > 1$, то $\nu \leqslant 8(\pi - 1)$, 3) если $p = 0, -1$; $\pi > 1$, то $\nu \leqslant 8(\pi - 1)$; исключение представляют 3 поля. Поля, для которых $p = 0, 1$, перечислены в цитированных выше статьях. В заключение приводятся некоторые проблемы теории нейтральных полей.

В. В. Морозов

1928. О наибольшем числе линейно независимых линейных комплексов S_k пространства S_r, которым принадлежат S_k, касательные к некото-

рому алгебраическому многообразию V_k пространства S_r. **Галларати** (Sul massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r. Gallarati Dionisio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 1—2, 10—15 (итал.)

Доказывается теорема: Наибольшее число линейно независимых линейных комплексов с образующим элементом в виде линейного подпространства S_k пространства S_r, которым могут принадлежать все подпространства S_k, касательные к некоторому алгебраическому многообразию V_k пространства S_r, имеющему ∞^k касательных S_k, есть

$$\theta(r, k) = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1.$$

Так, например, у поверхности F^4 Веронезе ее касательные плоскости принадлежат 10 линейно независимым комплексам плоскостей пространства S_5, т. е. $\theta(5,2) = 10$. *Я. П. Бланк*

1929. Геометрические методы разрешения особенностей алгебраических поверхностей и многообразий. Дантони (Metodi geometrici per lo scioglimento delle singolarità delle superficie e varietà algebriche. Dantoni Giovanni), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 99—112 (итал.)

Обзор различных способов доказательства теоремы о возможности разрешения особенностей алгебраических поверхностей (работы вплоть до 1947 г.). Геометрические процессы, предложенные для этого разрешения, автор разделяет на а) процессы последовательной редукции и б) быстрые процессы, дающие одновременное разрешение всех особенностей. Первые оказываются слишком сложными, вторые — недоказанными с необходимой строгостью. Строгие же доказательства (Уокер, Зариский) сложны и развиваются в круге идей, посторонних геометрическим методам.

Автор предлагает следующий прием доказательства: пусть $\overline{V}_h$ — h-мерное неприводимое алгебраическое многообразие и пусть существует совокупность I бирациональных моделей $\overline{V}_h$, замкнутая относительно проектирования из кратных точек (это значит, что если $V'_h \subset I$ и имеет кратные точки, то проекция V'_h из такой кратной точки на произвольную гиперплоскость содержащего V'_h пространства также принадлежит I). Тогда, если P_m — пространство минимальной размерности m среди пространств, содержащих многообразия совокупности I, то любое многообразие из I, лежащее в P_m, является бирациональной моделью v_h, свободной от кратных точек.

Доказательство существования I проводится для $h = 1,2$ и, повидимому, может быть перенесено на случай произвольного h, если показать, что между бирациональными моделями $\overline{V}_h$ найдется такая, порядок ν и размерность ρ которой связаны соотношением

$$\nu \leqslant 2(\rho - h), \quad (C)$$

что справедливо при $h = 1,2$. Автор рассматривает совокупность всех бирациональных моделей $\overline{V}_h$, для которых имеет место (C), и, показав, что (C) сохраняется при проектировании, полагает эту совокупность образующей требуемую I. Однако вопрос о том, переходят ли при этом проектировании бирациональные модели в таковые же, автор особо не рассматривает.

В случае, если совокупность I считается замкнутой лишь относительно проектирования из кратных точек определенного типа, таким же образом доказывается существование бирациональных моделей с особенностями только определенного характера.

Наконец, для случая $h = 1$ предлагается следующий прием доказательства. Пусть C — неприводимая алгебраическая кривая, $\nu(\rho)$ — минимальный порядок бирациональных моделей C в пространстве размерности ρ и $M(\rho) = \nu(\rho) - \rho$. Функция $M(\rho)$ не убывает, неотрицательна и ограничена. Если $p = \max M(\rho)$, то существует такое $\bar{\rho}$, что при $\rho \geqslant \bar{\rho}$ будет $M(\rho) = p$. Тогда всякая модель C, лежащая в пространстве размерности $\rho \geqslant \max(p, \bar{\rho})$, свободна от кратных точек. Однако перенесение этого приема уже на случай $h = 2$ представляет трудности. *В. В. Морозов*

1930. Об общей теории коннексов произвольного измерения и базисе многообразия, принадлежащего произведению нелинейных многообразий. Пермутти (Sulla teoria generale dei connessi di dimensione qualunque e sulla base di varietà appartenenti al prodotto di varietà non lineari. Permutti Rodolfo), Ricerche mat., 1953, **2**, 128—139 (итал.)

Коннекс есть подмногообразие многообразия Сегре, которое является проективной моделью r-проективного пространства

$$S_{n_1 \ldots n_r} = S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r}.$$

Многообразие Сегре естественно возникает при изучении алгебраических соответствий и представляет один из типов алгебраических многообразий, базис которого (в соответствии с алгебраической эквивалентностью) известен. (Более полно см. Hodge, Pedoe, Methods of algebraic Geometry, Cambridge, 1952, **2**; см. также русский перевод: Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, т. II, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1954. *Прим. ред.*). Автор реферируемой работы получает из известных теорем некоторые интересные выводы, в частности, аналог теоремы Безу для пересечения двух коннексов дополнительных измерений. Неявно он предполагает наличие строгой теории пересечений многообразий в многообразии Сегре, однако вышеприведенная ссылка не дана. Рассматриваются некоторые специальные коннексы, возникающие в $S_{n_1} \times S_{n_2}$, когда компонент многообразия в S_{n_1} является рациональной кривой или поверхностью. *D. Pedoe*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 250.

1931. О канонических поверхностях с жанрами $p_g = 4$, $p^{(1)} \geqslant 11$. Бюрниа (Sur les surfaces canoniques de genres $p_g = 4$, $p^{(1)} \geqslant 11$. Burniat Pol), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 271—281 (франц.)

Автор пытается дать метод построения канонических поверхностей (к. п.) с жанрами $p_g=4$, $p^{(1)}\geqslant 11$ (для меньших значений $p^{(1)}$ они построены). Замечая, что не трудно построить двойную к. п. с $p^{(1)}>10$, он изучает возможность вырождения простой к. п. в двойную. Результат формулируется в виде теоремы: если $2F_n$ — двойная обыкновенная чисто к. п., геометрический жанр основания которой нуль, если $\Sigma\gamma_i^i$ — кратная кривая основания и $N\equiv\equiv 2c'+c-\Sigma i\gamma_i$ — простая кривая этой поверхности, предполагаемая эффективной, и если линейная система $|F_{2n}|$ поверхностей $F_{2n}(\Sigma\gamma_i^{2i}+N^2)$ эффективна и неприводима, то ее поверхности — чисто канонические и содержат как частный случай $2F_n$. Здесь c — система плоских сечений F_n; чисто канонической называется нормальная поверхность, плоские сечения которой — чисто канонические кривые; обыкновенной называется такая двойная поверхность, для которой кривая, представляющая совокупность неподвижных точек определенной на ней инволюции, не может быть сведена бирациональными преобразованиями к конечному числу исключительных кривых.

Применяя эту теорему, можно получить два типа канонических поверхностей для $p^{(1)}=11$ и по одному типу для $p^{(1)}=13$, 15, 17 (соответственно $n=5$, 6, 7, 8). Кроме того, указывается одна двойная к. п. с $p^{(1)}=11$ вида $2F_5$, не являющаяся случаем вырождения простых к. п. F_{10}. Отмечается одна особенность двух семейств $\{F_{10}\}$, которая, по мнению Сегре, возможно, объясняется тем, что эти семейства входят в более широкие. Дальнейшее развитие этих идей см. в позднейшей (хотя и ранее вышедшей из печати) работе автора (Modèles de surfaces canoniques normales de S_3 et de genre linéaire $11\leqslant p^{(1)}\leqslant 17$. Deuxième Colloque de Géom. Algebr., Liège, 1952, 185–210). *B. B. Морозов*

1932. Об обобщении одной теоремы Кастельнуово—Гумберта. Рот (Sull'estensione di un teorema di Castelnuovo—Humbert. Roth Leonard), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 6, 376—380 (итал.)

Исследуются несингулярные многообразия V_r ($r\geqslant 2$), содержащие конгруэнцию Г (неприводимую систему индекса $\nu\geqslant 1$ ∞^{r-1} кривых) рациональных кривых С. Полученные результаты относятся к тому же кругу идей, что и теорема Кастельнуово—Гумберта, утверждающая унирациональность поверхностей, содержащих алгебраическую систему индекса $\nu>1$ рациональных кривых (которая, как замечает автор, неверна уже при $r=3$, $\nu=2$) и формулируются в виде условий, обеспечивающих унирациональность V_r (например, если $\nu>1$ и кривые С нечетного порядка, то V_r унирационально и представимо посредством инволюции I_ν).

Получены результаты, касающиеся инвариантов вышеописанного типа V_r: для V_r процесс построения присоединенных поверхностей обрывается, следовательно, геометрический жанр и плюрижанры V_r равны нулю. В частности, если Г бирациональна, то поверхностная иррегулярность V_r равна нулю, следовательно, при $r=3$, арифметический жанр V_3 неположителен, а если $\nu=1$, то все жанры V_r равны нулю (V_r — вполне регулярное). *B. B. Морозов*

1933. О дивизорах дифференциальных форм на алгебраических многообразиях. Накаи (On the divisors of differential forms on algebraic varieties. Nakai Yoshikazu), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 2, 184—199 (англ.)

Отправляясь от алгебраического определения дифференциальных форм алгебраического многообразия, принадлежащего Вейлю (Weil A., Foundations of algebraic geometry, New York, 1946), автор вводит классы эквивалентности дифференциальных форм, определяемых над различными полями, и отождествляет эквивалентные формы. Доказывается, что каждой дифференциальной форме ω однозначно соответствует дивизор (ω), определяемый соотношением $(\omega)=\Sigma_{\mathbf{A}}v_A(\omega)\cdot\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ пробегает простые дивизоры рассматриваемого многообразия, а коэффициенты $v_A(\omega)$ определяются как минимумы норм (в нормировании v_A) коэффициентов выражения дифференциальной формы ω через дифференциалы униформизирующих параметров в некоторой точке подмногообразия A. Доказывается независимость этого определения от выбора точки подмногообразия A и униформизирующих параметров в этой точке. Центральным результатом работы является теорема:

Пусть $\mathbf{V}$ — проективная модель некоторого r-мерного алгебраического многообразия, ω—дифференциальная форма степени $p<r$ (на многообразии V), определенная над полем k, а $\mathbf{W}$ — сечение многообразия $\mathbf{V}$ общей гиперплоскостью над полем k. Тогда форма ω индуцирует на многообразии $\mathbf{W}$ дифференциальную форму $\bar{\omega}$ той же степени p, обладающую следующими свойствами:

1. $\bar{\omega}\neq 0$, если $\omega\neq 0$.
2. $(\bar{\omega})=(\omega)\,\mathbf{W}$ при $p\leqslant r-2$,

$(\bar{\omega})=(\omega)\,\mathbf{W}+\bar{\mathbf{X}}$ при $p=r-1$.

Здесь дивизор $\bar{\mathbf{X}}>0$, причем каждая его компонента имеет над своим полем задания общую точку, являющуюся общей точкой многообразия $\mathbf{V}$ (автор называет такие подмногообразия порождающими подмногообразиями для $\mathbf{V}$). *А. И. Узков*

1934. Об алгебраических семействах положительных дивизоров и об ассоциированных многообразиях на проективном многообразии. Мацусака (On algebraic families of positive divisors and their associated varieties on a projective variety. Matsusaka Teruhisa), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 2, 113—136 (англ.)

Рассматриваются семейства положительных дивизоров на нормальном алгебраическом многообразии $\mathbf{V}$ в проектном пространстве. Максимальное алгебраическое семейство дивизоров $\{\mathbf{X}\}$ на $\mathbf{V}$ называется регулярным, если для любого дивизора $\mathbf{Y}$, алгебраически эквивалентного нулю, имеет место линейная эквивалентность $\mathbf{Y}\sim\mathbf{X}-\mathbf{X}'$, где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ — некоторые дивизоры из $\{\mathbf{X}\}$. Опираясь на доказанное им существование регулярных максимальных семейств (Proc. Japan. Acad., 1952, 28, 5—8), автор доказывает, что любые два алгебраически эквивалентных дивизора имеют один и тот же виртуальный арифметиче-

ский род в смысле Зарисского (Zarisski, Ann. Math., 1952, 55, 552—592). Кроме этого, доказываются следующие предложения:

1. Два различных максимальных алгебраических семейства дивизоров, выбранных из одного класса алгебраической эквивалентности, не могут одновременно быть регулярными.

2. Если $\{X\}$ — любое максимальное алгебраическое семейство, то всегда существует такое целое число m_0, что при $m > m_0$ максимальное алгебраическое семейство $\{X + C_m\}$, где C_m — дивизор, определяемый сечением многообразия гиперповерхностью порядка m, будет регулярным.

3. Многообразия W, соответствующее в смысле ван-дер-Вардена и Хоу (Waerden van der, Math. Ann., 1937, 113, 692—704) регулярному максимальному алгебраическому семейству $\{X\}$, бирационально эквивалентно произведению $P \times L$, где P — пикаровское многообразие для V, а L — проективное пространство надлежащей размерности.

В заключение работы приводится некоторая классификация алгебраических семейств дивизоров и без доказательства формулируется теорема о существовании (или несуществовании) минимальных проективных моделей для семейств этих классов.

А. И. Узков

1935. Некоторые исправления. Абельянас (Algunas correcciones. Abellanas Pedro). Rev. mat. hisp.-amer., 1953, 13, № 5/6, 310—311 (исп.)

Исправления опечаток в статьях автора «Алгебраические соответствия. II» (Correspondencias algebraicas II, Rev. mat. hisp.-amer., 1951, 11, 159—170) и «Ориентация алгебраических многообразий» (Orientación de variedades algebraicas. Rev. mat. hisp.-amer., 1952, 12, 79—101), в соответствии с замечаниями Круля (Krull, Zbl. Math., 1952, 44, 354) и Сегре (Segre. Math. Revs, 1953, 14, 314).

Б. А. Розенфельд

1936. К изысканию новых интегральных инвариантов на алгебраических многообразиях. Мартинелли (Alla ricerca di nuovi integrali invarianti sulle varietà algebriche. Martinelli Enzo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 398—406 (итал.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1937. Дифференциальная геометрия комплекса прямых. Цыпкин М. Е., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 89—107

Произвольный комплекс задается уравнением

$$x = x(a^1, a^2, a^3), \qquad (1)$$

где x принимает значения шести плюккеровых координат прямой x^α. Основным рабочим понятием является понятие линейного комплекса или винта r, задаваемого шестью коэффициентами r_α его уравнения $r_\alpha x^\alpha = 1$. Если u^α — криволинейные координаты на абсолютной гиперквадрике пятимерного пространства, то винт $v = v^\alpha \partial x / \partial u^\alpha$ (v^α произвольны) называется винтом направления, приложенным к прямой x. Винт направления n, приложенный к прямой x комплекса (1) и находящийся в инволюции с каждым из винтов $x_i = \partial x / \partial a^i$, называется винтовой нормалью этого комплекса. Винты $v = v^i x_i$ называются винтами комплекса.

Вводится симметрический тензор $\gamma_{ij} = x_i x_j$ (метрический тензор комплекса). Тогда внутренним дифференциалом винта комплекса v объявляется винт $\Delta v = \delta v^i x_i$, где δ — символ абсолютного дифференцирования в метрике γ_{ij}. Произвольную поверхность комплекса (1) можно задать уравнением

$$x = x(s), \qquad (2)$$

где s — «лонгальный» параметр, для которого касательный винт $t = dx/ds$ является единичным (плюккеров квадрат t_0 его равен 1). Совокупность винтов $m = \rho t_0 + \sigma \Delta t_0 / ds$ образует соприкасающуюся винтовую площадку с поверхностью (2); единичный винт комплекса t_1, принадлежащий этой площадке и находящийся в инволюции с винтом t_0, называется главной винтовой нормалью поверхности (2), единичный винт t_2, находящийся в инволюции с каждым винтом соприкасающейся площадки, — винтовой бинормалью этой поверхности. Отсюда можно получить уравнения, аналогичные уравнениям Серре-Френе:

$$\Delta t_0 / ds = \varepsilon \alpha t_1, \quad \Delta t_0 / ds = \varepsilon (-\alpha t_0 + \beta t_2), \quad \Delta t_2 / ds = -\varepsilon \beta t_1,$$

где $\varepsilon = t_i t_i = \pm 1$ и коэффициенты α и β называются внутренней кривизной и внутренним кручением поверхности (2). При $\alpha = 0$ имеются прямейшие поверхности, при $\beta = 0$ — плосковидные.

Для характеристики поверхностей комплекса на них вводятся инвариантные линии. Прямая a, пересекающая под прямым углом в точке A образующую x поверхности (2), касающаяся этой поверхности и принадлежащая винтовой нормали n комплекса, называется инвариантной касательной, а место точек A — инвариантной линией поверхности (2). На обыкновенной поверхности существуют две инвариантные линии. Прямейшая поверхность может быть охарактеризована тем, что в каждой точке ее инвариантных линий средняя кривизна поверхности равна нулю; плосковидная поверхность — тем, что существует внутренне переносимый по ней винт v (удовлетворяющий вдоль поверхности условию $\Delta v = 0$), находящийся в инволюции с t. Поверхности, для которых $t_0 t_1 = 0$ (для $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ имеем $\bar{v} = \{0, 0, 0, v_1, v_2, v_3\}$), называются необыкновенными несобственными. Они оказываются поверхностями Каталана и параметр распределения их лишь знаком отличается от шага соответствующей винтовой нормали комплекса. При $t_1^2 = 0$ поверхность называется собственной обыкновенной. На ней существует собственная инвариантная линия (или две слившихся), в точках которой средняя кривизна поверхности равна нулю. Поверхности $t_0^2 = 0$ являются развертывающимися.

Тензор $\pi_{ij} = -n_j x_i$ называется вторым метриче-

ским тензором комплекса, а винт $\lambda^i x_i$, где $\lambda^i x_i x_j = -\pi_{ij} du^i$ — винтом Родрига. Главные винты комплекса с направлением du^i определяются из уравнений $(\pi_{ij} - \rho\gamma_{ij})\, du^i = 0$, где ρ — корень уравнения $\det|\pi_{ij} - \rho\gamma_{ij}| = 0$. Каждый комплекс в общем случае имеет три главных винта. Поверхности с главными касательными винтами называются поверхностями кривизны. Для них винт Родрига совпадает с касательным винтом. Комплекс с неопределенными поверхностями кривизны является линейным.

Условие $\pi_{ij} v^i v^j = 0$ определяет сопряженные винты. Самосопряженные винты называются асимптотическими, и такое же название носят поверхности, касательные винты которых являются асимптотическими. Винт Родрига такой поверхности находится в инволюции с касательным винтом этой поверхности. Линейный комплекс характеризуется тем, что любая его развертывающаяся поверхность является асимптотической. *Н. И. Кованцов*

1938. Несобственные прямые линии на минимальной поверхности Шерка. А р а, П и н л ь (The ideal straight lines on Scherk's minimal surface. A r a R a h m a t, P i n l M.), Pakistan J. Sci. Res., 1953, 5, № 4, 145—149 (англ.)

Исследуются несобственные прямые минимальной поверхности Шерка расширенного евклидова пространства. Три пары этих несобственных прямых суть пересечения шести семейств параллельных плоскостей, которые пересекают минимальную поверхность Шерка по 6 семействам плоских кривых переноса; два из этих семейств состоят из вещественных кривых. При доказательстве используется наличие на поверхности сети Чебышева. *В. А. Ябловов*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1939. Геометрия шаровых многообразий. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 93—109

Рассматриваются многообразия шаров (гиперсфер) n-мерного евклидова пространства R_n и n-мерного сферического пространства S_n.

Многообразия ориентированных шаров ненулевого радиуса в R_n и S_n могут быть взаимно однозначно отображены на гиперсферу ${}^1S_{n+1}$ радиуса 1 в $(n+2)$-мерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_{n+2}$, причем расстояние между двумя точками гиперсферы ${}^1S_{n+1}$, измеренное по ней, равно углу между соответствующими шарами, а группы конформных преобразований R_n и S_n изоморфны группе вращений ${}^1S_{n+1}$. При этом отображении точкам R_n и S_n взаимно однозначно соответствуют изотропные направления, выходящие из центра гиперсферы ${}^1S_{n+1}$ (асимптоты этой гиперсферы).

Большие круги гиперсферы ${}^1S_{n+1}$ изображают последовательность шаров, проходящих через одну действительную или мнимую $(n+2)$-мерную сферу — геодезические пучки шаров. В зависимости от того, будет ли этот большой круг «замкнутым», «разомкнутым» или прямолинейной образующей гиперсферы ${}^1S_{n+1}$, соответствующий ему геодезический пучок шаров может быть переведен конформным преобразованием в пучок гиперплоскостей, пересекающихся по $(n-2)$-мерной плоскости («эллиптический пучок» шаров), в пучок концентричных шаров («гиперболический пучок») или в касательный пучок шаров («параболический пучок»).

Рассматриваемое отображение лежит в основе всех известных интерпретаций неевклидовых геометрий с помощью шаров.

В семействах шаров изучается распределение локальных параметров и находятся формулы, дающие закон изменения параметра распределения в зависимости от направления, аналогичные формулам Мангейма для конгруенций прямых в R_3.

Отмечается, что аналогичную теорию можно построить, исходя из любой группы преобразований шаров в R_n и S_n, переводящих шары радиуса R в шары того же радиуса. *М. А. Акивис*

1940. О представлении финслеровых пространств неголономными многообразиями в римановых пространствах. Д е й к к е (Über die Darstellung von Finsler — Räumen durch nichtholonome Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen. D e i c k e A r n o), Arch. Math., 1953, 4, № 3, 234—238 (нем.)

Опорным элементом финслерова пространства F_n, связанного с формой $ds^2 = g_{ij}(x^i, \dot{x}^i)\, dx^i dx^j$, $\dot{x}^i = \partial x^i/\partial x^1$, $i,j = 1, 2, \ldots, n$, является линейный элемент — точка и направление $(x^i, \dot{x}^i)$. К каждому такому опорному элементу присоединяется n-мерное локальное евклидово пространство E_n и в нем выбирается n-эдр $\{m, \mathbf{e}_i\}$ с единичными и взаимно перпендикулярными с точки зрения метрики E_n осями, $\mathbf{e}_1$ направляется по линейному элементу. Тогда параллельное перенесение определяется по Картану (Cartan E., Les espases de Finsler, Paris, 1934, Galvani O., Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1950, 2, 123—146) формами ω^i, ω^j_i, удовлетворяющими уравнениям структуры

$$D\omega^i = \left[\omega^k \omega^i_k\right] - A^i_{kl}\left[\omega^k \omega^l_1\right],\ A^i_{kl} = A^k_{il},\ A^1_{kl} = 0,$$

$$D\omega^k_i = \left[\omega^l_i \omega^k_l\right] - R^k_{ilm}\left[\omega^l \omega^m\right] - 2P^k_{ilm}\left[\omega^l \omega^m_1\right] - S^k_{ilm}\left[\omega^l_1 \omega^m_1\right], \quad (1)$$

$$R^k_{ilm} = -R^k_{iml},\ S^k_{ilm} = -S^k_{iml},$$

где ω^i, ω^i_1 — независимые формы.

С другой стороны, пространство опорных элементов есть $(2n-1)$-мерное $(x^i, \dot{x}^i)$. В нем можно ввести риманову метрику, т. е. с каждой точкой его связать $(2n-1)$-мерное евклидово пространство H_{2n-1} и соответствующий репер $\{M, \mathcal{E}_I\}$; параллельное перенесение определяется формами Ω^I, Ω^K_I с уравнениями структуры

$$D\Omega^I = \left[\Omega^J \Omega^I_J\right],\ I, J = 1, 2, \ldots, 2n-1, \quad (2)$$

$$D\Omega^K_I = \left[\Omega^J_I \Omega^K_J\right] - R^K_{IJZ}\left[\Omega^J \Omega^Z\right],\ R^K_{IJZ} = -R^K_{IJZ}.$$

Пространство F_n будет погружено в R_{2n-1}, если каждому линейному элементу F_n можно поставить в соответствие точку R_{2n-1} таким образом, что в последнем в каждом H_{2n-1} можно выделить такое плоское H_n и направление $\mathcal{E}_1$ в нем, что его метрика и проекция на него перенесения H_n', присоединенного к бесконечно близкой точке, совпадают с метрикой и перенесением финслерова пространства F_n. Если $\mathcal{E}_1$ выбрать в H_n, то это условие запишется в виде уравнений

$$\Omega^i = \omega^i, \tag{3}$$
$$(\mathrm{mod}\,\Omega^\alpha), \alpha = n+1, \ldots, 2n-1,$$
$$\Omega_i^j = \omega_i^j. \tag{4}$$

Продолжение уравнений (4) даст условие на кривизну риманова пространства. Продолжение уравнений (3) даст

$$\left[\Omega^\alpha \Omega_\alpha^i\right] = A_{kl}^i \left[\omega^k \omega_1^l\right]; \tag{5}$$

система $\Omega^\alpha = 0$ вполне интегрируема и определяет в R_{2n-1} $(n-1)$-параметрическое семейство n-мерных поверхностей V_n, касательными элементами к которым являются H_n, т. е. финслеровы пространства представляются фактически в виде голономных многообразий в римановом пространстве. При этом соответствии прообразом любого V_n в F_n будет поле линейных элементов. Так как в силу (5) $A_{kl}^i = 0$ $(\mathrm{mod}\,\Omega^\alpha)$, то вдоль каждого такого поля финслерово пространство не имеет кручения.

Обратно, если в F_n существует $(n-1)$-параметрическое семейство дважды дифференцируемых полей с таким свойством, то его можно погрузить в подходящее выбранное R_{2n-1}.

Аналитически это необходимое и достаточное условие выражается в инволюционности системы

$$\theta^i = A_{kl}^i \left[\omega^k \omega_1^l\right] = 0,$$
$$D\theta^i = 0,$$

где ω^i — независимые, а ω_1^l — неизвестные формы. При $n = 2$ система находится в инволюции и получается результат Гальвани (Galvani O., C. r. Acad. sci., 1946, 223, 1088—1090). Финслеровы пространства с абсолютным параллелизмом линейных элементов также удовлетворяют последней системе. Однако произвола общего решения автор не нашел, ссылаясь на трудность применения в этом случае критерия Картана. *М. В. Васильева*

1941. Просто гармонические аффинные пространства симметрической связности. Руз (Simply harmonic affine spaces of symmetric connection. Ruse H. S.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 169—174 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

В римановом пространстве R^n обозначим $\Omega \equiv \equiv \varepsilon s^2/2$, где s — длина дуги геодезической и $\varepsilon = \pm 1$. Принято R^n называть гармоническим, если

$$\Delta_2 \Omega \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\,\frac{\partial \Omega}{\partial x^j}\right)$$

является функцией только Ω, и просто гармоническим, если эта функция постоянна (известно, что эта постоянная может равняться только n).

Эти понятия непосредственно не распространяются на неметрические пространства. Для пространства аффинной связности A^n Патерсон (Patterson E. M., J. London Math. Soc., 1952, 27, 102—107) вводил их при помощи бесконечной последовательности условий на тензор кривизны. В реферируемой работе это делается естественнее. Пусть $x^i = x^i \times$ $\times (x_0^j, ta^j)$ — уравнение пути, проходящего в A^n через точку (x_0^j) по заданному направлению a^j, где t — аффинный нормальный параметр; если ковариантную производную вектора $Y^i \equiv t dx^i/dt$ обозначить $Y^i_{;k}$, то A^n назовем просто гармоническим при $Y^i_{;i} = n$.

Пусть в $A^n(x^i)$, $i = 1, \ldots, n$, со связностью Γ_{jk}^i задан симметрический тензор c_{ij}. Римановым расширением A^n принято называть такое $R^{2n}(x^i, x^{i'})$, $i' = n+1, \ldots, 2n$, для которого

$$ds^2 = \left(c_{ij} - 2\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k x^{n+k}\right) dx^i dx^j + 2\sum_{k=1}^{n} dx^k dx^{n+k}.$$

Патерсон доказал, что если R^{2n} просто гармонично, то таково же и A^n (и наоборот). В реферируемой работе прямая часть теоремы усилена: если R^{2n} гармонично, то оно (а следовательно, и A^n) просто гармонично. *П. И. Швейкин*

1942. Спинорная связность в обобщенной теории относительности Эйнштейна. Главатый (The spinor connection in the unified Einstein theory of relativity. Hlavatý Václav), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 6, 501—506 (англ.)

Рассматривается четырехмерное пространство X_4 с метрическим тензором $g_{\lambda\mu} \neq g_{\mu\lambda}$. Однако фактически играет роль лишь его симметрическая часть $h_{\lambda\mu} = g_{(\lambda\mu)}$, которой приписывается сигнатура — — — +. На основе $h_{\lambda\mu}$ устанавливается связность $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\}$.

В каждой точке $P \in X_4$ каждому вектору $v^\lambda(P)$ ставится в соответствие матрица

$$v_b^{\cdot a} = E_{\lambda b}^{\cdot\cdot a}(P)\, v^\lambda(P), \tag{1}$$

где

$$\left\| E_{\lambda a}^{\cdot\cdot b}(P) \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & E_\lambda^I & E_\lambda^{III} \\ 0 & 0 & E_\lambda^{IV} & -E_\lambda^{II} \\ E_\lambda^{II} & E_\lambda^{III} & 0 & 0 \\ E_\lambda^{IV} & -E_\lambda^I & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $E_\lambda^I, \ldots, E_\lambda^{IV}$ — векторы, образующие (неголономный) репер, в котором

$$\| h_{AB} \| = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

(векторы E_λ^I и E_λ^{II} — комплексно-сопряженные).

Латинскими индексами $a, b, \ldots = 1, 2, 3, 4$ мы нумеруем однородные координаты в локальном трехмерном проективном пространстве S_3, по экземпляру которого присоединено к каждой точке $P \in X_4$. Согласно (1) каждому вектору $v^\lambda(P)$ сопоставлена коллинеация в $S_3(P)$. Пространства S_3 называются спинорными.

Можно установить связность, отображающую $S_3(P)$ на $S_3(Q)$ (P, Q — любые бесконечно близкие точки X_4), если задаться ее коэффициентами $\Gamma^a_{b\lambda}$ (с точностью до слагаемого кратного δ^a_b). Оказывается, что такая связность определится однозначно, если потребовать

$$\Xi_\mu E^{\cdot\cdot b}_{\lambda a} = 0, \qquad (2)$$

где Ξ_μ — оператор ковариантного дифференцирования, действующий на греческие индексы с помощью $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, а на латинские — с помощью $\Gamma^a_{b\mu}$. Смысл требования (2) в том, что при параллельном перенесении должно сохраняться отображение (1) векторов v^λ на коллинеации $v^{\cdot a}_b$. Далее выписываются явные выражения для $\Gamma^a_{b\lambda}$, пронормированных условием $\Gamma^a_{a\lambda} = 0$.

Эти результаты содержатся по существу в работе Ингрехэма (см. РЖМат, 1954, 4906), который рассматривал общий случай $n = 2\nu$ (хотя и не провел конкретных подсчетов для $n = 4$). *П. К. Рашевский*

1943. К выводу уравнений поля тяготения в общей теории относительности. Колер (Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinrelativistischen Gravitationstheorie. Kohler Max), Z. Physik, 1953, 134, № 3, 306—316 (нем.)

Пространство общей теории относительности с метрикой g_{ij} и христоффелями Γ^k_{ij} рассматривается в привилегированной системе координат, которую автор называет нормальной. Пусть G — какая-либо функция от g_{ij} и Γ^k_{ij} («гамильтонова функция»), которая кладется в основу теории; тогда тензор энергии импульса T_{ik} определяется из вариационного принципа

$$\delta \int G dX + \varkappa \int (T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}) \delta \mathfrak{g}^{ik} dX = 0, \qquad (1)$$

где область интегрирования произвольна и метрика в ней произвольно варьируется при условии, что на границе $\delta g_{ik} = 0$. При этом $\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}\sqrt{-g}$, $\varkappa$ — константа, $T = g^{ik}T_{ik}$, $dX = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Тензор энергии-импульса гравитационного поля вводится по определению по формуле

$$\varkappa t^\alpha_\beta = -\frac{1}{2}\left(G\delta^\alpha_\beta - G^\alpha_{ik}\mathfrak{g}^{ik}_\beta\right), \qquad (2)$$

где

$$\mathfrak{g}^{ik}_l = \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x^l}; \quad G^\alpha_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial \mathfrak{g}^{ik}_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \mathfrak{g}^{ki}_\alpha}\right)$$

(очевидно, G можно рассматривать и как функцию от $\mathfrak{g}^{ik}$, $\mathfrak{g}^{ik}_\alpha$).

Если, в частности, положить

$$G = \mathfrak{g}^{kl}\left(\Gamma^p_{kl}\Gamma^m_{pm} - \Gamma^m_{kp}\Gamma^p_{lm}\right),$$

то мы возвращаемся к теории Эйнштейна.

Автор рассматривает несколько иной случай, именно, когда 1) G — однородная квадратичная функция от $\mathfrak{g}^{ik}_l$, 2) G — скалярная плотность относительно аффинных преобразований, 3) тензор t^α_β, вычисленный согласно (2), симметричен, $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$ (последнее условие в случае Эйнштейна не соблюдается).

Оказывается, что при этих условиях

$$G = \left(\lambda_1 \mathfrak{g}^{il}_p \mathfrak{g}^{km}_q + \lambda_2 \mathfrak{g}^{ik}_p \mathfrak{g}^{lm}_q\right) g_{ik} g_{lm} g^{pq} / 4\sqrt{-g},$$

где λ_1, λ_2 — произвольные константы.

С точки зрения этой теории проводится подробное исследование слабого поля тяготения (§ 1), отклонения светового луча вблизи Солнца (§ 2) и вращения перигелия Меркурия (§ 3). В частности, оказывается, что для совпадения слабого поля с ньютоновым полем тяготения приходится положить $\lambda_2 = \lambda_1(\lambda_1 - 2)/2(3 - 2\lambda_1)$.

Когда $\lambda_1 = 1$ (а значит, $\lambda_2 = -1/2$), результаты §§ 2, 3 совпадают с результатами Эйнштейна и тем самым с опытными данными.

Предлагаемая теория инвариантна по существу всего лишь при аффинных преобразованиях координат, хотя автор внешне маскирует это внесением в пространство «второй метрики». Вторая метрика псевдоевклидова и нужна в основном для того, чтобы мотивировать выделение нормальных координат, за которые принимаются ее декартовы координаты.

П. К. Рашевский

1944. Уравнения движения непрерывной среды в переменных Лагранжа в специальной теории относительности. Тьябджи (Equations of motion for continuous matter of special relativity in the Lagrange variables. Tyabji S. F. B.), Nature, 1953, 172, № 4390, 1147—1148 (англ.)

Приводятся уравнения движения идеальной жидкости в частной теории относительности, полученные из некоторого вариационного принципа в переменных Лагранжа. Эти уравнения совпадают с уравнениями Эйлера, получаемыми обычным путем, т. е. приравниванием нулю дивергенции тензора материи — энергии. Отсюда делается вывод, что разница между переменными Лагранжа и Эйлера в четырехмерном континууме исчезает. В этих расчетах автор пренебрегает появлением материи за счет изменения давления во времени. Но эффект изменения давления можно учесть, если внести указываемую автором поправку в отдельно добавляемые лагранжевы уравнения непрерывности. Перечисленные выше и некоторые другие вопросы автор предполагает подробно изложить в работе, подготовляемой к печати. *Б. Л. Лаптев*

1945. О фундаментальном тензоре последней теории Эйнштейна. Пастори (Sul tensore fondamentale nell'ultima teoria di Einstein. Pastori Maria), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 537—541 (итал.)

Рассматривается ковариантное дифференцирование с помощью несимметричного фундаментального тензора в связи с тем, что в своей книге А. Эйнштейн (Einstein A. The meaning of relativity, Princeton,

1950) предложил единую теорию поля, в которой поле характеризуется таким тензором.

Б. А. Розенфельд

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

1946. Финслеровы пространства с алгебраическими основными функциями. Моор (Finslersche Räume mit algebraischen Grundfunktionen. Moor A.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 178—180 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Изучаются двумерные финслеровы пространства

$$ds = L(x, y;\ dx,\ dy),$$

основная функция которых имеет вид:

$$L(x, y;\ \dot{x}, \dot{y}) = \sqrt[4]{f},\ f = \sum_{i=0}^{4} a_i(x, y)\,\dot{x}^{4-i}\dot{y}^{i}. \qquad (1)$$

Рассматриваются алгебраические инварианты

$$i = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2a_2,\ j = \begin{vmatrix} a_0a_1a_2 \\ a_1a_2a_3 \\ a_2a_3a_4 \end{vmatrix},\ D = i^3 - 27j^2$$

и коварианты формы f, при помощи которых дается классификация.

Различаются три типа финслеровых пространств (1): (α) пространства $i = j = D = 0$; форма f приводится к виду $f = (b_i\dot{x}^i)^3 \cdot c_j\dot{x}^j$, $(i, j = 1,2)$;

(β) пространства $D = 0$, $i \neq 0$; форма $f = (b_i\dot{x}^i)^2 \times c_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$;

(γ) пространства $D \neq 0$, $f = a_{ijkl}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k\dot{x}^l$ $(i, j, k, l = 1, 2)$.

Вопрос эквивалентности двух финслеровых пространств с основными функциями L, $\overline{L}$ вида (1) сводится к задаче: существует ли преобразование координат $x^i = x^i(\overline{x})$, которое сохраняет инварианты i, j и преобразует в случае (α) векторные поля b_i, c_j в поля $\overline{b}_i$; $\overline{c}_j$; в случае (β) векторное поле b_i и тензорное поле c_{jk} в поле $\overline{b}_i$, $\overline{c}_{jk}$ и в случае (γ) поле a_{ijkl} в поле $\overline{a}_{ijkl}$.

При отыскании условий эквивалентности исследуются смешанные системы дифференциальных уравнений в основном аналогично тому, как это делается при отыскании условий эквивалентности двух инвариантных квадратичных дифференциальных форм (см., например, Веблен О., Инварианты дифференциальных квадратичных форм, 98—105). *М. А. Акивис*

1947. Дифференциальная топология. VI. Топологические инварианты элементов шапочки. Бомпьяни (Topologia differenziale. VI. Invarianti topologici di elementi di una calotta. Bompiani Enrico), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 5, 242—248 (итал.)

Рассматривается совокупность криволинейных элементов E_2 второго порядка, проходящих через точку O (0,0), определяемых равенством

$$y = \lambda x + \mu x^2 + \text{члены третьего порядка.}$$

Совокупность таких элементов называется шапочкой (calotta) с центром O.

Автор ставит своей задачей рассмотреть точечные преобразования (т. п.), оставляющие неизменной O и сохраняющие некоторые элементы E_2 шапочки с центром O. Показывается, что существуют преобразования, оставляющие неизменными любые четыре наперед заданных элемента E_2, и что можно выбрать (причем не единственным образом) систему координат, в которой эти преобразования имеют вид:

$$x = \alpha\overline{x}\{1 + \sigma_1\overline{x} + \sigma_2\overline{y}\} + \text{члены третьего порядка,}$$

$$y = \alpha\overline{y}\{1 + \sigma_1\overline{x} + \sigma_2\overline{y}\} + \text{члены третьего порядка.}$$

С точностью до бесконечно малых третьего порядка эти преобразования эквивалентны проективным преобразованиям

$$x = \frac{\alpha\overline{x}}{1 - \sigma_1\overline{x} - \sigma_2\overline{y}},\ y = \frac{\alpha\overline{y}}{1 - \sigma_1\overline{x} - \sigma_2\overline{y}}.$$

В силу произвольности σ_1, σ_2 можно ограничиться преобразованиями $x = \alpha\overline{x}$, $y = \alpha\overline{y}$, т. е. гомотетиями.

Таким образом, устанавливается теорема: Изучение т. п., оставляющих инвариантным четыре элемента E_2 шапочки, эквивалентно (ограничиваясь окрестностью второго порядка) изучению гомотетий в аффинной плоскости.

Кроме четырех инвариантных элементов E_2, существует еще ∞^1 элементов E_2, инвариантных относительно того же преобразования.

Наконец, следует утверждение: если т. п. оставляет неизменными пять элементов, так что никакой из них не принадлежит к ∞^1 элементов, определяемых другими четырьмя, то соответствующая гомотетия есть тождество ($\alpha = 1$).

Аналогичным образом устанавливаются топологические инварианты шести элементов E_2 шапочки, а также изучаются свойства т. п., оставляющие неизменными три элемента E_2 шапочки. *Н. Н. Яненко*

1948. Об определении точечных преобразований плоскости с совпадающими характеристическими направлениями. Буцано (Sulla determinazione delle trasformazioni puntuali tra due piani con direzioni caratteristiche tutte coincidenti. Piero Buzano), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 282—286 (итал.)

Точечному преобразованию плоскости $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ соответствует определенная система линейных уравнений в частных производных $z_{xx} = a_1z_x + a_2z_y$, $z_{xy} = b_1z_x + b_2z_y$, $z_{yy} = c_1z_x + c_2z_y$, решениями которой служат функции f и g. Характеристические направления совпадают, если уравнение $c_1m^3 - (c_2 - 2b_1)m^2 + (a_1 - 2b_2)m - a_2 = 0$ имеет тройной корень. Преобразования, для которых характеристические направления совпадают, имеют вид (с точностью до аффинного преобразования) или 1) $x' = \dfrac{\rho_1(y)}{\psi(y) - x}$, $y' = \dfrac{\rho_2(y)}{\psi(y) - x}$, где $\rho_1(y)$, $\rho_2(y)$ — частные решения уравнения $\rho'' = \varphi(y)\rho$, или 2) $x' = \varphi(y)x + \psi(y)$, $y' = \int \varphi^2(y)\,dy$, или 3) более сложный вид, для которого автор выписывает систему уравнений в частных производных с неизвестными функциями a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2; с точностью до бесконечно малых высшего порядка такие преобразова-

ния являются произведением аффинного преобразования

$$X' = f_x X + f_y Y,\ Y' = g_x X + g_y Y$$

и преобразования вида

$$X' = X\left(1 + \frac{a_1 + b_2}{3} X + \frac{b_1 + c_2}{3} Y\right) + \frac{1}{6(a_1 - 2b_2)}[(a_1 - 2b_2) X - (c_2 - 2b_1) Y]^2,$$

$$Y' = Y\left(1 + \frac{a_1 + b_2}{3} X + \frac{b_1 + c_2}{3} Y\right) + \frac{1}{6(c_2 - 2b_1)}[(a_1 - 2b_2) X - (c_2 - 2b_1) Y]^2,$$

где $X = \bar{x} - x$, $Y = \bar{y} - y$.

Н. Я. Виленкин

1949. Разностная геометрия бесконечно малого изгибания поверхностей. Зауэр (Differenzengeometrie der infinitesimalen Flächenverbiegung. Sauer Robert), Monatsh. Math., 1953, 57, № 3, 177—184 (нем.)

Изгибание поверхности можно изучать в связи с «изламыванием» (Verknickung) многогранной поверхности с твердыми ребрами. Свойства изламывания вообще отличны от свойств изгибания; и разностно-геометрические предложения об изламывании многогранных поверхностей не аналогичны дифференциально-геометрическим предложениям об изгибании поверхностей. Например, многогранная поверхность из треугольников более деформируема, чем гладкая поверхность. Две пересекающиеся ломаные (из ребер) на этой поверхности могут быть в известных границах изламываемы произвольно, в то время как на гладкой поверхности только одна линия может быть изгибаема произвольно.

Для многогранных поверхностей из четырехугольников (плоских или косых, т. е. «грани» понимаются в обобщенном смысле) есть несколько возможностей: а) жесткая многогранная поверхность, не допускающая никакого изламывания, б) многогранная поверхность, допускающая однопараметрическое множество изламывания, т. е. менее деформируемая, чем гладкая поверхность, в) плосковершинная многогранная поверхность, т. е. поверхность, у которой всякие четыре ребра, выходящие из одной вершины, лежат в одной плоскости (четырехугольники, образующие эту поверхность, вообще говоря, косые).

Плосковершинная многогранная поверхность из четырехугольников, вообще говоря, жесткая, но допускает бесконечно малое изламывание, свойства которого аналогичны свойствам бесконечно малого изгибания поверхностей отрицательной кривизны (постоянной или переменной). Как известно, бесконечно малое изгибание поверхности $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ определяется уравнением $\boldsymbol{x}^\varepsilon = \boldsymbol{x}(u, v) + \varepsilon \boldsymbol{x}^*(u, v)$. Если вектор $\boldsymbol{x}^*$ тоже рассматривать как радиус-вектор, то каждый линейный элемент поверхности $\boldsymbol{x}^*$ перпендикулярен соответственному линейному элементу поверхности $\boldsymbol{x}$, т. е. существует такой вектор $\boldsymbol{y}$, для которого $d\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y} \times d\boldsymbol{x}$; кинематический смысл этого вектора вполне очевиден. Поверхности $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(u, v)$ «обратно параллельны», т. е. касательная к линии $u = \text{const}$ первой поверхности параллельна касательной к линии $v = \text{const}$ в соответственной точке второй поверхности. Если линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на первой поверхности асимптотические, то на второй они образуют сопряженную сеть. Аналогично этому плосковершинной многогранной поверхности из четырехугольников соответствует бесконечное множество обратно параллельных «плоскогранных» (из плоских четырехугольников) поверхностей. Связь между этими обратно параллельными поверхностями в вопросе о бесконечно малом изламывании такая же, как в случае бесконечно малого изгибания гладких поверхностей отрицательной кривизны. Приводится несколько пар соответственных предложений об изгибании и изламывании для иллюстрации этого утверждения. *Н. М. Бескин*

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1950. Распространение теоремы Хелли на случай полных выпуклых поверхностей. Шош (Ausdehnung des Hellyschen Satzes auf den Fall vollständiger konvexer Flächen. Soós Gy.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 244—247 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Распространяется известная теорема Хелли о существовании общей точки у конечных выпуклых областей плоскости, из коих каждые три имеют непустое пересечение, на случай полных выпуклых поверхностей. Именно, доказывается теорема:

Пусть K_1, K_2,... — совокупность ограниченных выпуклых областей на полной выпуклой поверхности F такая, что пересечение любых трех областей не пусто и имеет внутренние точки. Тогда пересечение всех областей K_i не пусто.

В приведенной формулировке теорема неверна, как показывает следующий пример. Опишем около центра правильного тетраэдра T сферу S, содержащую тетраэдр целиком внутри. Грани тетраэдра, будучи продолжены, отрезают от сферы S четыре сегмента. Эти четыре сегмента удовлетворяют условиям теоремы. Однако их пересечение пусто.

Для правильности теоремы нужны некоторые дополнительные предположения относительно областей K_i, по крайней мере для случая, когда идет речь о выпуклых областях на замкнутой поверхности. *А. В. Погорелов*

1951. Объемлющий шар точечной совокупности. Элементарное доказательство теоремы Юнга для пространства. Кирш (Die Pferchkugel eines Punkthaufens. Kirsch A.), Math.-phys. Semesterber., 1953, 3, № 3/4, 214—217 (нем.)

Обобщая известную теорему Юнга (Радемахер, Тёплиц, Числа и фигуры, ОНТИ, М.-Л., 1938, 114—123): для любой точечной совокупности диаметра d всегда существует объемлющий круг, радиус которого не превышает $d\sqrt{3}/3$,— автор дает элементарное доказательство теоремы: для любой пространственной точечной совокупности диаметра d всегда существует объемлющий шар, радиус которого $r \leqslant d\sqrt{6}/4$. *С. И. Зетель*

1952. Об одном необходимом признаке плотнейшего расположения фигур. Залгаллер (Despre un criteriu necesar de asezare cit ai compactă a figurilor. Zalgaller V. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1954, 7, № 2, 66—75 (рум.)

Перевод статьи из журнала «Успехи матем. наук» (РЖМат, 1954, 1807).

См. также: 1621, 1622, 1623, 1625, 1626, 1627, 1660, 1853.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1953. Итеративный метод решения разностных уравнений эллиптического типа. Янг (Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Young David), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 76, № 1, 92—111 (англ.)

Исследуется итеративный метод решения системы линейных алгебраических уравнений $\sum_j^N a_{ij}u_j + d_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, где матрица (a_{ij}) удовлетворяет следующему условию: $|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} |a_{ij}|$.

Последовательные итерации определяются формулой

$$u_i^{(m+1)} = \omega\left\{\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}u_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^{N} b_{ij}u_j^{(m)} + c_i\right\} - (\omega - 1)u_i^{(m)};\ (m \geqslant 0;\ i = 1, 2, \ldots, N)$$

($u_i^{(0)}$ — произвольные числа; $c_i = -d_i/a_{ii}$; ω — коэффициент релаксации), или короче $u^{(m+1)} = L_{\sigma,\omega}[u^{(m)}] + f$, где σ означает некоторый порядок уравнений. При $\omega = 1$ метод превращается в обычный метод Зейделя.

При соответствующем σ и выборе коэффициента релаксации ω (именно, $\omega = \omega_b = 1 + \left[\frac{\bar{\mu}}{1+(1-\bar{\mu}^2)^{1/2}}\right]^2$, где $\bar{\mu}$ означает максимум модулей собственных значений матрицы (b_{ij})) скорость сходимости $R(L_{\sigma,\omega_b})$, определяемая как $-\log\lambda$, λ — спектральная норма итерируемой матрицы, асимптотически равна удвоенному квадратному корню из скорости сходимости зейделевского итеративного процесса $R(L_{\sigma,1})$: $R(L_{\sigma,\omega_b}) \sim 2[R(L_{\sigma,1})]^{1/2}$ (при $\bar{\mu} \to 1$) и определяется равенством $R(L_{\sigma,\omega_b}) = -2\log\frac{\bar{\mu}}{1+(1-\bar{\mu}^2)^{1/2}}$. Для всех вещественных ω, не равных ω_b, имеет место $R(L_{\sigma,\omega}) < R(L_{\sigma,\omega_b})$. Если $\omega = 1 + \left[\frac{\bar{\mu}'}{1+(1-\bar{\mu}'^2)^{1/2}}\right]^2$, где $\bar{\mu}'$ удовлетворяет условию $(1-\bar{\mu}') = \theta(1-\bar{\mu})$ $(0 < \theta \leqslant 1)$, то при $\mu \to 1$ имеет место $R(L_{\sigma,\omega}) \sim \theta^{1/2}R(L_{\sigma,\omega_b})$, т. е. погрешность в определении $\bar{\mu}$ (в сторону увеличения, но так, чтобы $\bar{\mu}' < 1$) не вызывает существенного замедления итеративного процесса.

Возникшая при решении краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + Fu + G = 0$$

методом конечных разностей алгебраическая линейная система при достаточно малом шаге h удовлетворяет требуемым условиям. Поэтому к ней применима вышеизложенная теория. Например, для уравнения Лапласа в случае параллелепипеда с ребрами длины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\bar{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi h}{a_k}\right)$, поэтому при $h \to 0$ $R(L_{\sigma,\omega_b}) \sim 2\pi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{-2}\right)^{1/2}h$. Вместе с тем обычный процесс дает $R(L_{\sigma,1}) = -2\log\bar{\mu} \sim \left(\sum_{k=1}^{n}\pi^2 a_k^{-2}\right)h^2$, т. е. меньшую в $\frac{2}{\pi}\left(\sum a_k^{-2}\right)^{-1/2}h^{-1}$ раз скорость сходимости, чем при рассматриваемом методе. Число итераций при использовании $L_{\sigma,\omega}$ порядка h^{-1}, тогда как при использовании $L_{\sigma,1}$ — порядка h^{-2}.

Автор обращает внимание на целесообразность использования рассматриваемого метода по сравнению с обычными. Рассмотрен пример решения задачи Дирихле для единичного квадрата с $h^{-1} = 20$, 50, 100, 300 на вычислительной машине УНИВАК. Число итераций, требуемых для уменьшения погрешности на 0,1% от первоначального значения, определяется в случае метода Зейделя неравенством $m \geqslant -\log 0{,}001 / R(L_{\sigma,1})$, а для нового метода — неравенством $m \geqslant -\log 0{,}001/R(L_{\sigma,\omega_b})$. Например, при $h^{-1} = 100$ в случае метода Зейделя $R(L_{\sigma,1}) = 0{,}000998$, число итераций 6922; в случае нового метода $R(L_{\sigma,\omega_b}) = 0{,}062843$, число итераций 195, $\omega_b = 1{,}939091$. По поводу вопросов, рассматриваемых в работе, см. также Frankel S., Math. Tables and Other Aids Comput., 1950, 4, 65—75.

В. К. Саульев

1954. Оценка погрешности итеративного метода для линейных и нелинейных краевых задач. Коллац (Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben. Collatz L.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 4, 116—127 (нем.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — метрическое пространство, в котором определены сложение и вычитание. В области $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ задан оператор T и существует постоянная Липшица K такая, что

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leqslant K\|f_1 - f_2\|. \qquad (1)$$

Рассматривается уравнение $Tf = f$ с решением u и итеративный процесс $u_{n+1} = Tu_n$, причем предполагается, что $u_n \in \mathfrak{B}$. Если $K < 1$, то

$$\|u_n - u\| \leqslant \frac{K}{1-K}\|u_{n-1} - u_n\|. \qquad (2)$$

Пусть дана краевая задача (L — линейный дифференциальный оператор)

$$L[u] = F(x_1, \ldots, x_m, u),\quad U_\mu[u] = 0 \text{ на } \Gamma \qquad (3)$$
$$(\mu = 1, \ldots, k),$$

где Γ — граница области B в m-мерном евклидовом пространстве. Предполагается, что задача

$$L[u] = r,\quad U_\mu[u] = 0 \qquad (4)$$

однозначно разрешима.

Задача (3) решается итеративным методом

$$L[u_{n+1}] = F(x_1, \ldots, x_m, u_n),\quad U_\mu[u_{n+1}] = 0. \qquad (5)$$

Обозначим $g = Tf$, если $L[g] = F(x_1, \ldots, x_m, f)$, $U_\mu[g] = 0$. Тогда (3) и (5) записываются в виде

$Tu = u$, $u_{n+1} = Tu_n$ и применима оценка (2).

Для случая $F = pu + q$ рассматриваются нормировки:

а) $\|f\| = \sqrt{\int_B |f|^2 d\tau}$;

б) если функция Грина задачи (4) неотрицательна и для этой задачи известна положительная внутри B собственная функция Z, можно принять $\|f\| = \sup_B |f/Z|$;

в) $\|f\| = \max_B |f|$;

г) $\|f\| = \max_B \sqrt{f^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2}$;

д) $\|f\| = \sup_B |f/W|$, где W — заданная положительная в B функция.

Для норм б), в) и д) подсчитывается постоянная Липшица K. При этом для норм в) и д) требуется знание функции Грина. Если F не является линейной относительно u, рекомендуется норма д).

Для одномерного случая рассмотрена и задача вида

$$L[u] = F(x, u, u', \ldots, u^{(s)}), \quad U_\mu[u] = 0.$$

Приводятся примеры.

Примечание референта. Заметка носит эскизный характер. Состав $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{B}$, как правило, не указывается. Допускаются бесконечные значения нормы. Термин «пространство Банаха» применяется не в общепринятом смысле. *М. К. Гавурин*

1955. Применение метода конечных разностей к расчету переходных процессов в линиях с распределенными параметрами. Флору В. Н., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, серия электрорадиотехн., 1954, 3, № 1, 33—47

Рассматриваются возможности численного решения телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (Lg + RC)\frac{\partial u}{\partial t} + Rgu \qquad (1)$$

методом конечных разностей при различных граничных условиях. Применяется прямоугольная сетка такая, что диагонали прямоугольников являются характеристиками уравнения (1). Первая производная по t и вторые производные по x и t заменяются соответствующими разностными выражениями

$$(u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k-1})/2\tau, \quad (u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,\,k})/h^2,$$
$$(u_{i,\,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,\,k-1})/\tau^2.$$

Указаны способы составления уравнений для вычисления функции u на боковых сторонах данной прямоугольной области в случае, если граничные условия для уравнения (1) содержат две неизвестные функции u и i (напряжение, соответственно ток). Дается физическая интерпретация метода. Именно, предлагаемый метод является обобщением обычных методов расчета схем с многократными отражениями в технике проводной связи. Указана возможность применения этого метода для расчета многократных отражений в многопроводной системе. Применение метода иллюстрируется расчетом протяженного заземлителя.

Вопрос сходимости решений разностных уравнений к соответствующим решениям дифференциального уравнения, а также вопрос устойчивости разностных схем в работе не рассматриваются. *Н. А. Бразма*

1956. Расчет косоугольных пластинок переменной толщины методом сеток. Гуменюк В. С., Сб. тр. Ин-та строит. механ. АН УССР, 1954, № 19, 74—81

Рассматривается уравнение

$$D\nabla^2\nabla^2 W + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 W + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 W + \nabla^2 D\nabla^2 W - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = q,$$

где W — прогиб, q — поперечная нагрузка, ν — коэффициент Пуассона, $D = D(x, y)$ — цилиндрическая жесткость.

Даются приближенные разностные аппроксимации на косоугольной сетке дифференциальных операторов, входящих в уравнение.

Приводятся два числовых примера расчета на правильной треугольной сетке свободно опертых треугольной и трапецоидальной пластинок с линейным законом изменения толщины в направлении оси симметрии и с симметричной нагрузкой.

Вопросы точности не рассматриваются. *Е. А. Волков*

1957. О численном решении граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Глинская Н. Н., Мысовских И. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, 49—54

Рассматривается дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y)$ с граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$. Пусть $y_0(x)$ — функция, непрерывная вместе со своими первыми двумя производными при $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем $y_0(0) = y_0(1) = 0$, и $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность функций, определяемая линейным дифференциальным уравнением

$$y_k' - y_{k-1}' = f_y(x, y_{k-1})(y_k - y_{k-1}) + f(x, y_{k-1}) - y_{k-1}''$$

с граничными условиями $y_k(0) = y_k(1) = 0$. Без доказательства формулируется следующее утверждение:

Если (a) $|y_0'' - f(x, y_0)| \leqslant \eta$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, (b) $|f_y(x, y_0)| \leqslant M < 8$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, (c) $|f_{yy}(x, y)| \leqslant K$ в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|y - y_0| \leqslant 2\eta/(8 - M)$ и (d) $\eta K/(8 - M)^2 \leqslant 1/2$, то рассматриваемая краевая задача в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|y - y_0| \leqslant 2\eta/(8 - M)$ имеет единственное решение $y(x)$ и $|y_k(x) - y(x)| \leqslant z - z_k$, где z — положительный корень уравнения

$$Q(z) = \frac{K}{16}z^2 - \frac{8 - M}{8}z + \frac{\eta}{8} = 0, \quad z_0 = 0,$$

$$z_k = z_{k-1} - \frac{Q(z_{k-1})}{Q'(z_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$ (предполагается, что функции $f(x, y)$, $f_y(x, y)$ и $f_{yy}(x, y)$ непрерывны в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|y - y_0| \leqslant 2\eta/(8 - M)$).

Указано далее, что условия (b), (c) и (d) можно заменить условиями (b*) $0 < f_y(x, y_0) < M$ при

$0<x<1$, $(c^*)\,|f_{yy}(x, y)|\leqslant K$ в области $0\leqslant x\leqslant 1$, $|y-y_0|\leqslant \frac{\eta}{4}\left(1+\frac{M}{8}\right)$, $(d^*)\left(1+\frac{M}{8}\right)^2\frac{\eta K}{8^2}\leqslant\frac{1}{2}$, заменив при этом функцию $Q(z)$ функцией

$$Q^*(z)=\frac{K}{2}z^2-\frac{8}{3-M}z-\frac{\eta}{8}.$$

Рассматриваемый в статье метод последовательных приближений и его обоснование основываются на исследованиях Л. В. Канторовича (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 104—144; Докл. АН СССР, 1951, 76, № 1, 17). *И. М. Рапопорт*

1958. Оценка погрешности при осреднении коэффициентов. Гольдин Е. М., Сб. науч. работ общетехн. и некоторых спец. кафедр (Ленингр. технол. ин-т холодильной пром-сти), 1954, 6, 88—95

При приближенном отыскании периодического решения уравнения $y''+A(x)y'+B(x)y=H(x)$, где $A(x)$, $B(x)$, $H(x)$ — периодические функции периода T, рассматривают вместо него уравнение $y_1''+ay_1'+by_1=H(x)$, где a и b — средние значения функций $A(x)$ и $B(x)$. Оценивается разность $|y-y_1|$, где y_1 — периодическое решение «упрощенного» уравнения. В оценку входит функция $y_1(x)$, но дана также более грубая оценка, непосредственно выраженная через $A(x)$, $B(x)$, $H(x)$.
М. Л. Бродский

1959. О формулах приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Блан (Sur les formules d'intégration approchée d'équations différentielles. Blanc Charles), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 301—308 (франц.)

Погрешность численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений обычно оценивается через производные высших порядков, умноженные на некоторую степень шага h. На практике величина шага является вполне определенной (а не стремится к нулю), и можно поставить вопрос о сравнении методов для «произвольной» функции. В работе сравниваются погрешности одного шага для методов Милна — Симпсона и Рунге—Кутта в предположении, что решение дифференциального уравнения является случайной функцией с некоторыми допущениями относительно гладкости, и для конечных значений шага h. Для больших $\frac{\partial f}{\partial y}h$ и гладких решений y метод Милна — Симпсона оказывается значительно выгоднее метода Рунге — Кутта. *М. Л. Бродский*

1960. Численное интегрирование уравнения $x''(t)=G(x)$. Вильямс (The numerical integration of $x''(t)=G(x)$. Williams Kenneth P.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 46, 121—122 (англ.)

Уравнение $x''(t)=G(x)$, имеющее приложения в небесной механике, численно интегрируется в форме, не требующей образования и накопления разностей, по формуле $x(t+h)=2x(t)-x(t-h)+h^2[A_0F(t)+\ldots+A_nF(t-nh)]$, где $F(t)=G[x(t)]$. Приведены таблицы A_n для $5\leqslant n\leqslant 9$.
М. Л. Бродский

1961. О приближенном решении интегральных уравнений Гюнтера. Скоробогатько В. Г., Тр. Среднеаз. ун-та, матем. н., 1954, **7**, № 36, 75—85

Показывается, что метод, примененный Д. Ю. Пановым (Изв. АН СССР, сер. матем., 1934, № 6, 843—889), для приближенного решения интегральных уравнений может быть распространен на интегральные уравнения в интегралах Стилтьеса

$$u(x)=f(x)+\int_{(E)}K(x,\omega)\,u(\xi)\,d\omega, \qquad (1)$$

изученные Гюнтером (Тр. Физ.-матем. ин-та им. Стеклова, 1932, 1, 494). Рассматриваются и некоторые частные случаи уравнения (1). *В. А. Щелкунов*

1962. Обратная интерполяция для производной в комплексной области. Солзер (Inverse interpolation for the derivative in the complex plane. Salzer H. E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 46, 119—121 (англ.)

Функция $f(z)$ задана в n точках некоторой квадратной сетки на комплексной плоскости. Приведены приближенные формулы для отыскания точки z, в которой производная $f'(z)$ принимает данное значение. Формулы даны для определенного расположения узлов $(3\leqslant n\leqslant 7)$ и пригодны для непосредственного вычисления. *М. Л. Бродский*

1963. Замечания об остатках в формулах Эйлера—Маклорена. Бельграно-Бремар (Acotaciones de los restos en las ffrmulas de Euler-Maclaurin. Belgrano Bremard J. C.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 5—6, 320—327 (исп.)

Для первой и второй формул Эйлера—Маклорена

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}[f(n)+f(0)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{l}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]+R_l,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}f(2k+1)=\frac{1}{2}\int_0^{2m}f(x)\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{l}\frac{B_{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(2m)-f^{(2k-1)}(0)]+R_l'$$

даны оценки остатков R и R' в трех случаях: 1) $f^{(2l+1)}$ есть монотонная функция при $0\leqslant x\leqslant n$; 2) $f^{(2l+2)}$ есть монотонная функция, сохраняющая знак при $0\leqslant x\leqslant n$; 3) для $0\leqslant x\leqslant n$ $f^{(2l+1)}$ и $f^{(2l+3)}$ обе либо возрастают, либо убывают и не изменяют знака. Все оценки просто получаются из интегральных представлений остатков R_l и R_l' при помощи известных свойств многочленов Бернулли.
В. И. Крылов

1964. Простая формула численного интегрирования. Спинг (A simple bounding formula for integrals. Synge J. L.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 1, 46—52 (англ.)

Дается формула приближенного численного интегрирования в областях n-мерного евклидова пространства. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)=F(A)$ — функция с ограниченной по всем направлениям второй производной, определенная в области D: $\left|\frac{d^2F}{ds^2}\right|\leqslant M$

в D (ds — элемент длины в направлении дифференцирования) и $\sup_D |F| = \overline{F}$. Разобьем пространство $(n-1)$-мерными плоскостями на n-мерные симплексы равного объема Δ. Сумму объемов ячеек внутри D обозначим через T. Пронумеруем вершины ячеек, лежащих внутри D, и обозначим через m_i число ячеек, примыкающих к вершине A_i. Тогда:

$$\int_D F\,dD = \frac{\Delta}{n+1}\sum_i m_i F(A_i) + E_1 + E_2,$$

где $|E_1| \leqslant \overline{F}(D-T)$, $|E_2| \leqslant kMT$; $k = (r_0^2 - P/\Delta)/2$; здесь r_0 — радиус сферы, описанной около Δ, и $P = \int_\Delta r^2\,dD$ — полярный момент инерции относительно центра Δ. *А. Л. Дышко*

1965. О точках расходимости ньютонова процесса при определении корней алгебраических уравнений. I. Барна (Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. I. Barna Béla), Publs mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 109—118 (нем.)

Автор исследует итерационный процесс $x_{n+1} = N(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $N(x) \equiv x - (f(x)/f'(x))$, где $f(x)$ — полином степени m, корни которого действительны и различны. Его интересуют два вопроса: 1) о мощности множества точек расходимости (под таковыми понимаются точки $x \equiv x_0$, для которых процесс не приводит к корню уравнения $f(x) = 0$); 2) о существовании полиномов, для которых точки расходимости заполняют целый промежуток. Оба вопроса были поставлены Реньи (Rényi A., Mat. lapok, 1950, 1, 278—293). Случай $m \leqslant 4$ был рассмотрен в предыдущей работе автора (Publs mathematicae, 1951, 2, 50—63); в данной работе речь идет о многочленах произвольной степени. Устанавливается, что множество точек расходимости может быть несчетным, приводится классификация точек расходимости. *В. Л. Гончаров*

1966. О связи между способами Ньютона и Уиттекера решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Доморяд А. П., Тр. Среднеаз. ун-та, матем. н., 1954, 7, № 36, 31—34

Рассматривается уравнение $f(x) = 0$. Пусть a — начальное приближение к его корню x_1; обозначим $F^{(s)} = f^{(s)}(a)/s!$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ и

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} F' & F & 0 & \ldots 0 \\ F'' & F' & F & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F^{(k-1)} & F^{(k-2)} & F^{(k-3)} & \ldots F \\ F^{(k)} & F^{(k-1)} & F^{(k-2)} & \ldots F' \end{vmatrix}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$, $\Delta_0 = 1$. Рассматривается формула получения следующего приближения:

$$a_1 = a - F(\Delta_{k-1}\Delta_k), \qquad (1)$$

которая при $k = 1$ обращается в формулу метода Ньютона. Если x_1 — ближайший к a корень уравнения $f(x) = 0$, то $z_1 = x_1 - a$ будет наименьшим по абсолютной величине корнем уравнения $f(a+z)$ и по методу Уиттекера

$$z_1 = x_1 - a = -\lim_{k\to\infty} F(\Delta_{k-1}/\Delta_k). \qquad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), автор утверждает, что метод Уиттекера можно рассматривать как обобщение метода Ньютона.

Примечание референта. Автор не отмечает, что формула (1) известна (см., например, Hamilton H. J., Amer. Math. Monthly, 1950, 57, № 8, 517—522). В работе много опечаток. Не указано, что $\Delta_0 = 1$. *И. П. Мысовских*

1967. Один итеративный процесс для численного решения алгебраических уравнений. Апаро (Un procedimento iterativo per la risoluzione nimerica delle equazioni algebriche. Aparo Enzo), Ricerca scient., 1954, 24, № 5, 1003—1005 (итал.)

Указан алгоритм для приближенного разложения многочлена $g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на множители. Определяется последовательность многочленов $r_h(x)$ (степени r_h не выше $n-1$) соотношениями: $x^n = g(x)\,q_0 + r_0(x)$, $xr_{h-1}(x) = g(x)\,q_h + r_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots)$. Строятся многочлены $s_h(x)$ — остатки при делении $g(x)$ на $r_h(x)$. Обозначим через $r_h^*(x)$ результат деления $r_h(x)$ на коэффициент при старшей степени x. Аналогичный смысл имеет обозначение $s_h^*(x)$. Последовательности $r_h^*(x)$ и $s_h^*(x)$ сходятся, вообще говоря, к многочленам соответственно $n-1$ и $n-2$ степени — делителям $g(x)$. Указаны рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов многочленов $r_h(x)$ и $s_h(x)$. Приведен численный пример. Вопросы сходимости не рассматриваются.

Автор не отмечает, что построение последовательности $r_h(x)$ сводится к тому частному случаю метода Лина, когда ищется делитель $n-1$ степени и за начальное приближение берется x^{n-1} (см. описание метода Лина, например, в РЖМат, 1954, 4579). *И. П. Мысовских*

1968. Заметка об итерационном процессе Лина для нахождения комплексных корней алгебраических уравнений. Моррис, Хед (Note on Lin's iteration process for the extraction of complex roots of algebraic equations. Morris J., Head J. W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, 6, ч. 4, 391—397 (англ.)

Изучается вопрос об асимптотической устойчивости метода Лина для приближенного определения делителей многочлена. Рассматриваются два случая: 1) из многочлена в качестве множителя выделяется квадратный трехчлен, 2) выделяется линейная функция. Результат авторов в случае 1) в более полном виде получен Хилдебрандом (РЖМат, 1954, 4580), результат в случае 2) получен Фридманом (Friedman B., Communs Pure and Appl. Math., 1949, 2, 195—208). *И. П. Мысовских*

1969. Комплексные корни трансцендентного уравнения. Голденберг (Complex roots of a transcendental equation. Goldenberg H.), Math. Gaz., 1954, 38, № 325, 161—165 (англ.)

Автор доказывает, что уравнение

$$\operatorname{cth} z = (c/z) - b \quad (c < 1,\ b > 0), \qquad (1)$$

которое можно также представить в виде

$$e^{2z} = [(b-1)z - c]/[(b+1)z - c], \qquad (2)$$

не имеет корней с положительной вещественной частью. Для случая $c < 0$ это легко обнаружить из сравнения модулей левой и правой частей уравнения (2). Для доказательства того, что это имеет место и в случае $0 \leqslant c < 1$, автор применяет графический прием. Приравнивая в (1) вещественные и мнимые части, автор рассматривает точки пересечения соответствующих линий. Подробное рассмотрение этих кривых показывает, что и в этом случае корни уравнения (1) имеют отрицательную вещественную часть.

Приводится пример решения уравнения (1) при $c = 0{,}5$, $b = 1/\sqrt{2}$ известными методами. Первые приближения находятся указанным выше графическим методом, а потом они уточняются методом итерации. *М. С. Горнштейн*

1970. **Что такое краковяны?** Банахевич (Co to sa krakowiany? Banachiewicz Tádeusz), Wszechświat, 1953, № 8, 193—195 (польск.)

Популярная статья, содержащая изложение одного из методов решения систем линейных уравнений.

1971. **О бинарной анаморфозе N-рациональных уравнений. Николаев П. В.,** Докл. АН СССР, 1954, 97, № 4, 601—604

Получены необходимые и достаточные условия существования A-множителя для уравнения $F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2; t_3, \tau_3) = 0$, F — аналитическая функция. *С. В. Бахвалов*

1972. **Номограммы для подбора моторов и приводов моторных вагонов. Вейнерт** (Nomogramme zur Bestimmung von Motoren und Getrieben für Triebwagen. Weinert Otto), Glasers Ann., 1954, 78, № 6, 166—169 (нем.)

Приведены 6 номограмм из выравненных точек с прямолинейными шкалами. Первая из 6 проградуированных логарифмических параллельных шкал (плюс одна неградуированная) по данным скорости поезда (*км/час*), диаметру колеса (*м*) и передаточным числам двух промежуточных передач дает возможность определить число оборотов мотора. Вторая состоит из двух равномерных, двух проективных и одной квадратичной шкал (плюс 2 немых) и дает возможность по уклону (‰) весу поезда (*т*), его скорости (*км/час*) и лобовой поверхности ($м^2$) определить необходимый момент (*кгм*). Третья номограмма, состоящая из 4 логарифмических параллельных шкал (попарно имеющих общие носители) и одной немой, дает возможность по моменту, числу оборотов и к. п. д. определить необходимую мощность в лошадиных силах. Четвертая подобного же типа — по мощности, скорости и к. п. д. определяет тяговое усилие. Того же типа пятая — дает возможность учесть изменение мощности с изменением температуры и высоты над уровнем моря. Наконец, последняя номограмма с тремя параллельными логарифмическими шкалами (момент, мощность, обороты) дает возможность менять мощность и обороты при заданном моменте.

Примечание референта. Пользование второй номограммой неудобно, особенно для ходовых скоростей 30—40 *км/час*. *И. Н. Денисюк*

1973. **Снижение температуры бетона. Куон** (Concrete temperature reduction. Quan Raymond F.), Refrig. Engng, 1954, 62, № 6, 65—67, 127—128 (англ.)

Указываются преимущества, которые дает предварительное охлаждение бетона. Далее даются формулы для определения температуры смеси, количества тепла и т. п. Для облегчения расчета приводятся 2 номограммы: одна с тремя параллельными логарифмическими шкалами и добавочной к ней небольшой номограммой (в виде абака), дающей поправку; другая типа Z-номограммы. Подробности построения этих номограмм не указаны.

Дается пример пользования этими номограммами, показывающий, что они действительно дают все необходимые данные. *И. Н. Денисюк*

1974 К. **Численные методы математического анализа. Микеладзе Ш. Е.,** 527 стр., М., Гостехиздат, 1953, 21 руб.

Содержание книги значительно уже, чем можно было ожидать по ее названию — она содержит начала исчисления конечных разностей (без уравнений в конечных разностях), вопросы аппроксимаций функций и интерполирования, численное дифференцирование и интегрирование, включая те же вопросы для функций двух переменных и функций комплексного переменного.

По главам содержание таково:

Гл. 1. Конечные разности; Гл. 2. Конечные суммы; Гл. 3. Разделенные разности; Гл. 4. Обратные разности; Гл. 5. Равномерные (наилучшие) приближения; Гл. 6. Точечное интерполирование; Гл. 7. Квадратические приближения; Гл. 8. Ряды Фурье и ортогональные многочлены; Гл. 9. Эмпирические формулы; Гл. 10. Расширение математических таблиц; Гл. 11. Обратная интерполяция; Гл. 12. Численное дифференцирование; Гл. 13. Численное интегрирование; Гл. 14. Формула суммирования Эйлера; Гл. 15. Формулы суммирования с разностями; Гл. 16. Конечное суммирование; Гл. 17. Интерполирование функции многих переменных; Гл. 18. Кубатурные формулы; Гл. 19. Символическое исчисление.

По рассматриваемым вопросам книга содержит обширный, но далеко не полный материал, в частности недостаточно использована современная литература. Выбор и оценка методов не ориентированы на использование математических машин.

Значительное место уделено вопросам конструктивной теории функций как теоретической базы численных методов, но материал выбран не наилучшим образом — изложен ряд вопросов, бесполезных для численного анализа, и не нашли места некоторые важные с этой точки зрения ее результаты. Многие доказательства излишне усложнены и не отчетливо изложены. Книга недостаточно тщательно отредактирована, смысл многих фраз не вполне ясен; досадно искажено известное высказывание Чебышева о роли практики (стр. 58). *Л. В. Канторович*

1975 К. **Графики функции $E(N, \delta) = \sum_{n=1}^{N} n^{-1/4} e^{in\delta}$. Рассек, Тверский** (Graphs of the function $E(N, \delta) = \sum_{n=1}^{N} n^{-1/4} e^{in\delta}$. Russek Joy, Twersky Vic., I+22 pp., Mathematics Research Group, Washington Square College of Arts and Science, New York University, Research Rep. № EM-49, 1953) (англ.)

Авторы дают 34 графика, относящихся к функции, указанной в заголовке. Пусть $E = C + iS$. Кривые S по C даны для $N = 1(1)10$, $0 \leqslant \delta \leqslant 180°$, причем C и S являются функциями δ в тех же пределах изменения переменных. Затем даны векторные изображения величины E при $\delta = \text{const}$ и значениях N, возрастающих от 1 до 10 ($\delta = 10$, 30, 90, 110°). Остальные графики представляют C по S в функции величины $u = (2N\delta/\pi)^{1/2}$ при $N = 10^2$, 10^3 и 10^4, а также функции C и S в тех же пределах изменения u и N. Точность графиков составляет около 5%. Показаны детали вычислений. Функция E встречается в проблеме многократного отражения и в проблеме антенн. *C. J. Bouwkamp*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 255.

1976 Д. Прямая и обратная задачи потенциала притяжения эллиптического цилиндра. В д о в и н И. В. Автореф. дисс. канд. геол.-минералог. н., Днепропетр. горный ин-т, Днепропетровск, 1954

ТАБЛИЦЫ

1977. Таблицы интеграла от произведения трех функций Лежандра. У с а м и (Tables of integral of product of three Legendre functions. U s a m i T.), Geophys. Mag., 1954, **25**, № 3—4, 243—249 (англ.)

Рассматривается вопрос построения и приводятся таблицы интеграла от произведения трех функций Лежандра

$$R_{m,n,k} = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} P_m(\mu)\, P_n(\mu)\, P_k(\mu)\, d\mu.$$

Этот интеграл необходим при разложении $P_n P_k$ в ряд по P_m. Также приводятся значения интеграла

$$R'_{m,n,k} = \frac{2m+1}{2} \frac{(m-1)!}{(m+1)!} \int_{-1}^{1} P^1_m(\mu)\, P^1_n(\mu)\, P_k(\mu)\, d\mu,$$

который встречается при разложении $P_k P^1_n$ в ряд по P^1_m. Таблицы вычислены для четных значений m, n, k. В табл. 1 приведены значения интеграла R и в табл. 2 — интеграла k' для $m = 0(2)12$, $n = 0(2)32$. При этом k принимает значения $|m-n| \leqslant k \leqslant m+n$. Так, например, для $m=4$, $n=10$ k может принимать 5 значений: 6, 8, 10, 12, 14. Эти значения расположены в колонке по возрастающим k. Значения интегралов в таблице даны с пятью знаками после запятой. *К. Е. Чернин*

1978. Вычисление основных вырожденных гипергеометрических функций. С л е й т е р (The evaluation of the basic confluent hypergeometric functions. S l a t e r L. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 3, 404—413 (англ.)

Рассматриваются обобщенные вырожденные гипергеометрические функции

$$_1\Phi_1(q^a;\, q^b;\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a)_n y^n}{(q^b)_n (q)_n} \qquad (1)$$

и

$$_1\Phi_1(q^a;\, q^b;\, q^{(n+1)/2} y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a)_n y^n q^{n(n+1)/2}}{(q^b)_n (q)_n}, \qquad (2)$$

где

$$(q^a)_n = (1-q^a)(1-q^{a+1}) \ldots (1-q^{a+n-1}).$$

Приводится ряд формул для этих функций, в том числе несколько рекуррентных соотношений для изменения на 1 параметров a и b.

Даются с 8 значащими цифрами вычисленные на машине ЭДСАК таблицы функции (1) для $a = 0{,}0(0{,}2)2{,}0$, $b = 0{,}2(0{,}2)1{,}0$, $q = 0{,}9$ и $0{,}99$ и $x = y'(1-q) = 1(1)10$ и таблицы функции (2) для тех же a и b, $q = 0{,}9$ и $x = 1(1)9$. *К. А. Семендяев*

1979. Формулы и таблицы для вычисления средних интенсивностей и потоков в звездной атмосфере. Р е й ц (Formulae and tables for the numerical computation of mean intensities and fluxes in a stellar atmosphere. R e i z A n d e r s), Arkiv astron., 1954, **1**, № 5, 475—482 (англ.)

Для определения средней интенсивности и потока излучения на оптической глубине τ в звездной атмосфере необходимо вычислять интегралы типа

$$\int_0^{\tau} f(t) E_1(\tau - t)\, dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\tau} f(t)\, E_2(\tau - t)\, dt, \qquad (1)$$

где $E_1(\tau)$ и $E_2(\tau)$ — первая и вторая интегрально-показательные функции. При указанном определении под $f(\tau)$ следует понимать так называемую «функцию источника».

Автор приближенно представляет интегралы (1) в виде

$$\int_0^{\tau} f(t)\, E_{1,2}(\tau - t)\, dt \simeq \sum_{i=1}^{r} p_i(\tau)\, f(t_i) \qquad (2)$$

и определяет весовые функции $p_i(\tau)$. Для этого выводятся формулы, дающие величины

$$\mu_x(\tau) = \int_0^{\tau} t^x E_{1,2}(\tau - t)\, dt. \qquad (3)$$

Связь между $\mu_x(\tau)$ и $p_i(\tau)$ устанавливается при помощи результатов, ранее полученных автором (Proc. Gambridge Philos. Soc., 1950, **46**, 1).

Даются таблицы величин $p_i(\tau)$ для всех значений τ от 0,1 до 4,9 через 0,1. Для каждого значения τ промежуток интегрирования в выражениях (1) разбит на пять равных частей. *В. С.*

1980 К. 50—100 биномиальные таблицы. Р о м и г (50—100 binomial tables. R o m i g H a r r y G., XXVII + 172 p., New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall, 1953, 32 s.) (англ.)

В таблицах даны с шестью десятичными знаками величины: 1) $C_n^x p^x q^{n-x}$ для $p = 0{,}01$ (0,01) 0,50, $q = 1-p$, $n = 50(5)100$ и всех значений x от 0 до n; 2) $\sum_{m=0}^{x} C_n^m p^m q^{n-m}$ для тех же значений p, q, n и x.

См. также: 1756, 1769, 1770, 1778, 1871, 1880, 1892; РЖАстр, 1954, 2124, 3663.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

1981. Вычислительная машина «Круг». Грейг (The Circle computer. Greig John), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, 7, № 44, 249—255 (англ.)

Приводится описание автоматической электронной цифровой вычислительной машины, названной «Круг» (Circle Computer). Описываемая машина одинаково удобна для решения больших и малых задач. В качестве запоминающего устройства и рабочего регистра используется магнитный барабан, вращающийся со скоростью 3450 об/мин. Емкость запоминающего устройства машины 1024 кода. Каждый код состоит из 40 двоичных разрядов и двух двоичных разрядов для знака.

Программирование одноадресное, по две команды в каждом коде. Логика машины аналогична применяемой в больших вычислительных машинах, например в машине ИАС (IAS) (РЖМат, 1954, 3485). Приводятся схема, показывающая расположение команд в коде, и таблица используемых команд (всего 34 команды), в которой дается расшифровка каждой команды, ее условное обозначение и среднее время, требуемое на ее выполнение. Сложение и вычитание требуют для своего выполнения по 25 мсек, умножение и деление — по 45 мсек. Среди команд, выполняемых машиной, имеются команды безусловного перехода и две команды условного перехода (при отрицательном знаке в сумматоре и при переполнении).

Особое внимание уделяется специальной «функциональной команде перехода» (Functional Table order), обеспечивающей переход к подпрограмме, а после ее выполнения — возвращение к выполнению требуемой команды основной программы. Использование этой команды позволяет также иметь подпрограмму в подпрограмме и т. д. Специальные команды позволяют осуществлять перевод чисел в двоичную и десятичную системы значительно быстрее, чем если бы это производилось посредством подпрограмм. Входное и выходное устройства состоят из телетайпа с реперфоратором и трансмиттера. Числа вводятся в машину и выводятся из нее в виде 8-разрядных десятичных чисел. Скорость перевода одного такого числа в двоичную форму вместе с вводом в машину занимает около 1 сек. Для ввода используется шестидырочная перфолента. Скорость ввода 10 разрядов в 1 сек. Ввод может также производиться вручную посредством клавиатуры. При выводе число печатаемых десятичных разрядов результата задается оператором, исходя из требований данной задачи. При налаживании машины или поисках ошибки в программе имеется возможность детально контролировать работу машины. Установка специального переключателя в положение «контроль» дает возможность посредством специальной подпрограммы, использующей «функциональную команду перехода», печатать на выходном устройстве всю информацию, соответствующую выполнению контролируемой программы.

Машина занимает такую же площадь, как и обычный конторский стол (см. фото). Пульт управления, входные и выходные устройства связаны с машиной гибкими кабелями. Для эксплуатации машины требуется один оператор. В машине используются стандартные схемы и лампы. Конструктивно вся машина состоит из отдельных субблоков, прикрепленных к рамам машины посредством завинчивающихся соединений. Такое соединение считается надежнее штепсельного разъема. Изготовление

К реф. 1981

трех подобных машин ведется Хогеновской лабораторией (Hogan labs, Inc.). Одна из строящихся машин имеет запоминающее устройство с емкостью 4096 кодов и возможность работать с полукодами, так что ее емкость может быть увеличена до 8192 полукодов. Приводится целый ряд возможностей для введения изменений в описываемую вычислительную машину. *А. Б. Залкинд*

1982. Универсальная счетная машина (General purpose digital computer), Prod. Engng, 1954, 25, № 4, 230 (англ.)

Сообщение фирмы «Ньюклеар Девелопмент» (Nuclear Development Associates, Inc.) о выпуске универсальной цифровой счетной машины «Круг» (Circle Computer) (см. реф. 1981). Машина имеет размеры 0,9 × 1,2 × 1,8 *м*, содержит 700 ламп, потребляет мощность 3,5 *квт* и питается от сети 110 *в* переменного тока. *Л. В. Кутуков*

1983. Недорогая цифровая вычислительная машина (Low-cost digital computer), Mech. Engng, 1954, 76, № 3, 268—269 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс рисерч» (Logistics Research, Inc.) о ведущейся разработке новой недорогой вычислительной машины АЛЬВАК (ALWAC). АЛЬВАК — универсальная вычислительная машина последовательного действия, удобная как для больших, так и для малых расчетов, а также для обработки статистических данных. АЛЬВАК имеет запоминающее устройство на магнитном барабане с вертикально расположенной осью вращения, емкость которого равна 2048 кодов. Запись и считывание информации производятся посредством одной и той же магнитной головки. Приводится фотография внешнего вида магнитного барабана.

АЛЬВАК выполняет 42 различные операции; устройство управления состоит из регистра команд, содержащего инструкцию, выполняемую в данный момент; управляющего регистра, куда передается инструкция в то время, когда она управляет машиной; регистра «следующей инструкции», содержащего инструкцию, к выполнению которой должна перейти машина. В качестве входных и выходных устройств

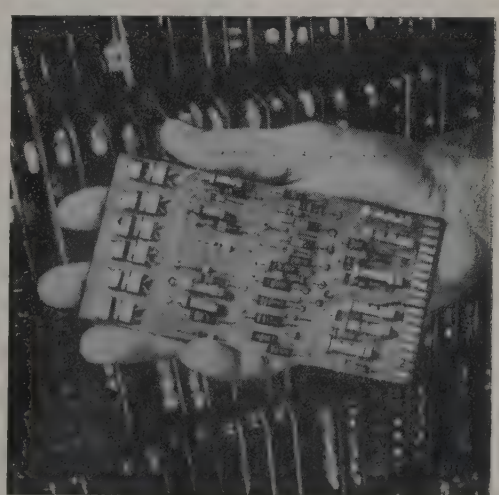
используются перфокартное оборудование, 10 телетайпов и трансмиттеры. Имеется возможность дистанционной связи входных и выходных устройств с машиной. Информация может быть также введена в машину вручную с помощью клавиатуры. Перевод в двоичную и десятичную системы производится машиной автоматически. Специальное оборудование позволяет вводить в машину информацию, заданную в виде графика, если кривая, представленная на нем, является функцией одного или двух независимых переменных. Можно вводить семейства кривых, вычерченные на одном листе. Устройство для ввода непрерывных данных будет автоматически переключаться с одной кривой на другую в соответствии с командами и записывать считываемые значения в запоминающее устройство. Имеется также устройство для автоматического вычерчивания кривых по полученным дискретным результатам. АЛЬВАК размещается в трех шкафах, имеющих ролики для передвижения по полу. Шкаф, содержащий магнитное запоминающее устройство, и шкаф питания имеют габариты 700 × 850 × 1600 *мм* и весят соответственно 152 и 208 *кг*. Шкаф, содержащий логические элементы, имеет габариты 700 × 1200 × 1600 *мм* и весит 200 *кг*. Машина питается от однофазной сети напряжением 110 или 220 *в*. В машине имеется принудительная вентиляция. Фирма дает гарантию на исправную работу машины в течение первого года эксплуатации. Продажная цена машины 48 000 долларов. *А. Б. Залкинд*

1984. Арифметический узел для автоматических цифровых вычислительных машин. Шток (An arithmetic unit for automatic digital computers. Stock John R.), Z. angew. Math. und Phys., 1954, **5**, № 2, 168—172 (англ.; резюме нем.)

Рассматривается последовательный арифметический узел вычислительной машины Швейцарского федерального технологического института (Swiss Federal Institute of Technology). Указываются преимущества, получаемые при работе вычислительной машины с числами, представленными в десятичной форме по системе с плавающей запятой. Для увеличения точности и для преобразования команд в отдельных случаях может применяться работа с фиксированной десятичной запятой. Большое среднее время выборки при использовании магнитного барабана (5—10 мсек.) требует для получения гармонии в работе машины сравнительно медленно производимых арифметических операций. Это позволяет использовать десятичную систему с плавающей запятой, требующую сравнительно большого времени для сложения и вычитания. Код числа описываемой машины состоит из 15 десятичных разрядов и одного разряда для контроля. Код может содержать либо: а) число с плавающей десятичной запятой (показатель — 2 разряда и знак, мантисса — 11 разрядов и знак); б) число с фиксированной десятичной запятой (14 разрядов и знак); в) две одноадресные инструкции, каждая из которых имеет три разряда для кода команды и четыре разряда для адреса. Арифметический узел имеет три основных регистра: для множителя, множимого и регистр-сумматор. Приводится перечень выполняемых операций: четыре операции выполняются независимо от системы представления числа; пять операций относятся к системе с плавающей запятой; пять операций — к системе с фиксированной запятой. Действия над порядками совершаются в тех же регистрах, где и действия над мантиссами. Отсутствуют специальные счетчики для управления умножением. Вместо них множитель при каждом получении нового частного произведения уменьшается на единицу. Аналогично операция сдвига осуществляется при отсутствии счетчика сдвигов. Приводится подробное описание операции сложения с выравниванием порядков слагаемых и нормализацией суммы. При умножении на цифру, большую пяти, вместо частных циклов сложения производится вычитание столько раз, сколько единиц в цифре, дополнительной до десяти. После этого, следующая цифра множителя увеличивается на единицу. Предусмотрен один дополнительный разряд, посредством которого осуществляется простейший контроль. Частота тактовых импульсов 32 *кгц*. Время циркуляции 0,5 мсек. Среднее время для сложения 5 мсек., для умножения 20 мсек., для деления 30 мсек., для прочих операций 1÷2 мсек. *А. Б. Залкинд*

1985. Вычислительная машина построена полностью на полупроводниковых триодах (A transistor» calculator is developed), Electr. Engng, 1954, **73**, № 12, 1062 (англ.)

Краткое сообщение о демонстрации в новой исследовательской лаборатории фирмы ИБМ в г. Поукипси (шт. Нью-Йорк) экспериментальной вычислительной машины, построенной полностью на полупроводниковых триодах. Эта машина по своим параметрам сравнима с известным электронным вычислительным перфоратором «модель 604» фирмы ИБМ, которых выпущено более 2000 штук; размер ее вдвое меньше, потребляемая мощность составляет только 5% мощности, потребляемой «моделью 604». В новой машине более 2200 полупроводниковых триодов, часть из которых была специально спроектирована инженерами фирмы, исходя из требований, предъявляемых к их работе. Полупроводниковые триоды смонтированы на 595 платах с печатными схемами; размер каждой платы составляет около $^2/_3$ стандартной перфокарты ИБМ (см. фото). *Д. Ю. Панов*



К реф. 1985

1986. Электронные счетные машины в Гёттингене. Бирман, Биллинг (Elektronische Rechenmaschinen in Göttingen. Biermann L., Billing H.), Phys. Bl., 1954, **10**, № 4, 174—176 (нем.)

Сообщается о работе электронных счетных машин G1 и G2 (РЖМат, 1953, 479, 1432—1434). На машине G1 было вычислено около 300 типичных траекторий космических частиц в магнитном поле Земли, а также были произведены вычисления по теории атомной оболочки (гелия), теории атомного ядра (поля мезонов) и нестационарных ударных волн. Среднее время работы машины с осени 1953 г. составляло 700 час. в месяц. Полезное время составляло приблизительно 80% от этого времени.

В машине G1 ход вычислений определяется сигналами, принятыми с перфоленты. В машине G2 программа вычислений вводится в виде кодов в запоминающее устройство.

Машина G2 снабжена устройством, которое автоматически производит необходимые изменения стандартных подпрограмм при объединении их в рабочую программу во время ввода с перфоленты.

Сообщается о подготовке к постройке более быстродействующей машины G3. *И. К. Хайлов*

1987. Электронная вычислительная машина (Electronic calculator), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 6, 108, 110—111 (англ.)

Сообщение о выпуске новой модели цифровой вычислительной машины ИБМ-607 (см. фиг. 2 к реф. 1989), которая является модернизацией машины ИБМ-604.

Машина ИБМ-604 была выпущена в 1948 г. и в настоящее время в эксплуатации находится более 1500 этих машин. Машина ИБМ-607 отличается от ИБМ-604 увеличенной емкостью памяти и более гибким программированием. В машине ИБМ-607 максимальная емкость внутреннего запоминающего устройства доведена до 162 разрядов. Программное устройство ИБМ-607 увеличено до 40 команд (с максимальной возможностью 140 команд) по сравнению с 20 командами в ИБМ-604. Кроме того, введена возможность пропуска ненужных команд за 80 *мксек.* вместо 520 *мксек.*, идущих на выполнение операций. Программное устройство является устройством матричного типа, благодаря чему достигается некоторая экономия ламп.

Еще одним отличием ИБМ-607 от ИБМ-604 является возможность увеличения времени вычислений на обработку одной карты на время, кратное ходу одной позиции карты (43 *мсек*), тогда как в ИБМ-604 это время можно было увеличивать на величину полного карточного хода (600 *мсек.*), что в некоторых случаях сильно снижало скорость.

Л. М. Шехтман

1988. Вычислительная машина с запоминающим устройством на магнитном барабане (Magnetic drum calculator), J. Franklin Inst., 1953, **256**, № 3, 300—301 (англ.)

Сообщение фирмы ИБМ о разработке новой электронной десятичной вычислительной машины с запоминающим устройством на магнитном барабане. По своим возможностям эта машина занимает промежуточное положение между электронным перфоратором ИБМ-604 и вычислительной машиной ИБМ с программированием на перфораторах. См. фиг. 1 к реф. 1989. *Н. Я. Матюхин*

1989. От фундаментальных исследований к инженерным расчетам (From fundamental research to engineering calculations), Computers and Automation, 1953, **2**, № 6, 36 (англ.)

Рекламное объявление фирмы ИБМ (IBM—International Business Machines) о продаже электронных цифровых вычислительных машин типа 701 (Electronic Data Processing Machines; РЖМат, 1954, 2375—2377); типа 650 (Magnetic Drum Calculator.

К реф. 1989

Фиг. 1

см. фиг. 1, см. также РЖМат, 1954, 4618); с программированием на перфокартах (Card-programmed Electronic Calculator); типа 607 (см. фиг. 2, см. также реф. 1987); вычислительного перфоратора типа 604.

К реф. 1989

Фиг. 2

1990. Новая вычислительная машина для промышленности (New computer for industry), Tele-Tech, 1954, **13**, № 7, 9 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой ИБМ (IBM) электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-702. Машина производит 10 000 000 операций в 1 час. В качестве внутренних запоминающих устройств используются электроннолучевые трубки и магнитный барабан. Результаты вычислений записываются на магнитную ленту. На каждой бобине магнитной ленты размещается до 5 000 000 двоичных знаков. Скорость записи достигает 15 000 знаков в 1 сек. Для ввода и вывода данных используются также перфокарты и рулонные телетайпы. Контроль и управление всей машиной осуществляются с главного пульта. Сообщается, что первые образцы вычислительной машины ИБМ-702 будут использоваться страховыми компаниями и промышленными предприятиями. Приводится фотография внешнего вида машины. *А. Б. Залкинд*

Примечание редакции. ИБМ-702 является модификацией машины ИБМ-701, предназначенной для промышленных и коммерческих расчетов.

1991. Электронная машина для промышленности (Electronic data processing machine), Radio-Electronic Engng Sec., 1954, **23**, № 2, 34 (англ.)

См. реф. 1990.

1992. Электронная машина должна быть построена. Ядерные исследования в Сиднейском университете («Electronic Brain» to be built. Nuclear research at Sydney University), Australas. Engr, 1954, **46**, Febr., 51—53 (англ.)

Сообщается о намечаемой постройке в университете г. Сидней (Австралия) быстродействующей цифровой электронной машины СИЛЛИАК (SILLIAC) по чертежам машины ИЛЛИАК (ILLIAC) университета Иллинойс (США). Машина будет иметь 3000 ламп, электростатическое запоминающее устройство на 40 обычных электроннолучевых трубках, объемом в 1024 числа и временем выборки 10μ сек. Операция сложения и вычитания занимает 100 μсек., умножения и деления 1 мсек. Устройства ввода и вывода работают на перфоленте.

Постройка машины связана с ядерными исследованиями университета, в частности с исследованием космических лучей. Указывается, что для исследования воздушного ливня, образованного при прохождении космических лучей через земную атмосферу, планируется установить большое число измерительных приборов, в том числе более 1800 счетчиков частиц. Обработка материалов, даваемых этими приборами при эксперименте с воздушным ливнем, при использовании настольной счетной машины заняла бы более 2000 лет. *Л. А. Любович*

1993. Электронная машина для университета в Сиднее (Electronic brain for Sydney University), Australas. Manufacturer, 1954, **38**, № 1979, 62 (англ.)

Сообщается о намерении руководства университета г. Сидней построить в течение двух лет электронную вычислительную машину СИЛЛИАК (SILLIAC) (см. реф. 1992). *В. Н. Аверин*

1994. «Стивенс» имеет электронную вычислительную машину большой емкости (Stevens has electronic computer with greater capacity), Marine J., 1954, **81**, № 4, 23 (англ.)

Сообщение о передаче для эксплуатации Стивенсовскому технологическому институту (Stevens Institute of Technology, Hoboken, N. J., США) вычислительной машины ETT-100, спроектированной и построенной инженерами Опытового бассейна (Experimental Towing Tank Laboratory). ETT-100 является цифровым дифференциальным анализатором, использующим магнитный барабан, и предназначается для исследований в областях управляемых снарядов, торпед, ракет, подводных лодок, газовых турбин и машиностроения. ETT-100 имеет 100 интеграторов при возможности доведения их числа до 200. Особенностью машины является возможность использования собственных вычислений для принятия логического решения. В качестве примера указывается задача, связанная с полетом управляемого снаряда, где машина определяет выбор формул при изменении скорости полета снаряда от дозвуковой до сверхзвуковой. ETT-100 проектировалась, строилась и налаживалась в течение двух лет. *А. Б. Залкинд*

1995. Вычислительная машина большой емкости (Largest computer yet), Aviat. Week, 1954, **60**, № 20, 44 (англ.)

См. реф. 1994.

1996. Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Дополнительный список, по состоянию на 10 апреля 1954 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation. Supplement, information as of Apr. 10, 1954), Computers and Automation, 1954, **3**, № 5, 8—9 (англ.)

Дополнение к сводному списку (РЖМат, 1953, 1452, 1454; 1954, 3875), включено 19 организаций из США.

1997. Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Дополнительный список, по состоянию на 3 июня 1954 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation. Supplement, information as of June 3, 1954), Computers and Automation, 1954, **3**, № 6, 8—9, 33 (англ.)

Дополнение к спискам 7,8 и 9 (РЖМат, 1953, 1452, 1454; 1954, 3875; 1955, 1996). В список включено 25 организаций из США.

1998. Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Сводный список, по состоянию на 3 октября 1954 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation. Cumulative, information as of October 3, 1954), Computers and Automation, 1954, **3**, № 9, 9—19, 30 (англ.)

В список включено 232 организации, из них в США — 200, в Англии — 10, во Франции — 10, в Канаде — 3, в Австралии — 2, в Швеции — 2, в Голландии — 1, в Италии — 2, в Дании — 1, в Германии — 1.

1999. Кто чем занят в области вычислительных машин и автоматики. Часть 1. Программирование. Дополнение к 1-му списку, по состоянию на 3 ноября 1953 г. (Who's who in computers and automation: Section 1— Programming. Supplement to first edition, information as of Nov. 3, 1953), Computers and Automation, 1953, **2**, № 9, 24—29 (англ.)

Дополнительный список научных работников, инженеров, расчетчиков, работников промышленности, интересующихся программированием (РЖМат, 1953, 1455, 1456). В список включено 73 человека, живущих в США, 16 — в Англии и 2 — в Канаде.

2000. Кто чем занят в области вычислительных машин и автоматики. Часть 2. Все виды занятий, кроме программирования. Дополнительный список, по состоянию на 3 декабря 1953 г. (Who's who in computers and automation: Section 2 — Business, not programming. Supplement, information as of Dec. 3, 1953), Computers and Automation, 1954, **3**, № 1, 17—18 (англ.)

Дополнение к 1-му списку (РЖМат, 1954, 2410) научных работников, инженеров, работников промышленности и торговых предприятий, интересую-

щихся различными вопросами в области вычислительных машин и автоматики. Указывается область интересов. В список включено 46 человек, живущих в США.

2001. **Кто чем занят в области вычислительных машин и автоматики. Часть 3. Все виды занятий, кроме производства и программирования. 1-й список, сводный, по состоянию на 25 апреля 1953 г., включающий фамилии с начальными буквами от A до D** (Who's who in computers and automation: Section 3 — Not business, not programming — A to D. First edition, cumulative, information as of April 25, 1953), Computers and Automation, 1953, **2**, № 4, 11—16 (англ.)

В список включено 134 человека из США, 4 — из Англии, 2 — из Канады. Продолжение списка см. РЖМат, 1954, 4226, 4952; 1955, 2002.

2002. **Кто чем занят в области вычислительных машин и автоматики. Часть 3. Все виды занятий, кроме производства и программирования. 1-й список, сводный, по состоянию на 3 августа 1953 г., включающий фамилии с начальными буквами от L до R** (Who's who in computers and automation: Section 3 — Not business, not programming — L to R. First edition, cumulative, information as of August 3, 1953), Computers and Automation, 1953, **2**, № 6, 19—25 (англ.)

В список включены 161 человек из США, 2 — из Канады, 1— из Англии. См. также РЖМат, 1954, 4226, 4952; 1955, 2001.

2003. **Машина-переводчик** (Language translator), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 2, 196 (англ.)

Краткое сообщение о переводе русского текста на английский язык с помощью машины ИМБ-701 (РЖМат, 1954, 5293, 5295). *К. С.*

2004. **Электронная машина читает по-русски** (Big brain reads russian), Mach. Design, 1954, **26**, № 3, 204, 206 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5293, 5295. Утверждается, что выбор русского языка для перевода сделан в связи с тем, что из-за недостатка людей, знающих русский язык, накапливается большое количество русских текстов, значение которых даже трудно оценить. *К. С.*

2005. **С русского языка на английский за 10 сек. при помощи электронной вычислительной машины ИБМ-701** (Du russe a l'anglais en 10 secondes grâce au calculateur électronique IBM-701), Ingrs et techniciens, 1954, №·64, 47—48 (франц.)

См. РЖМат, 1954, 5293, 5295 — 5301. Приведена фотография машины с указанием назначения каждого устройства.

2006. **Электроаналогии. Либман** (Electrical analogues. Liebmann G.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, **4**, № 7, 193—200 (англ.)

Обзор моделирующих устройств для решения уравнений в частных производных и некоторых других задач (сетки, электролитические ванны, расчетные столы).

Для моделирования задач, связанных с уравнением Лапласа, применяется полупроводящая бумага «теледельтос». Электроды наносятся на бумагу проводящей краской. Точность решения порядка 2%. Электролитическая ванна при решении подобных задач позволяет иногда получить ошибку не более 0,5% и дает возможность моделировать трехмерные процессы с осевой симметрией.

Электрические сетки из сопротивлений позволяют исследовать процессы в неоднородных областях с большой точностью (ошибка порядка 0,1%), а также, благодаря легкости изменения параметров, позволяют решать нестационарные процессы методом последовательных интервалов и нелинейные процессы методом последовательных приближений. Введение емкостей и индуктивностей позволяет исследовать переходные процессы.

Устройство «КАЛ-ТЕХ» Калифорнийского технологического института (CAL-TECH Computor) представляет собой дальнейшее развитие расчетного стола переменного тока, применяемого для расчета электрических сетей. Этот прибор позволяет составлять электрические модели для исследования переходных процессов в сложных системах.

В заключение автор дает сравнительную таблицу различных видов моделирующих устройств.

Библиография, 48 названий. *Н. В. Корольков*

2007. **Электронные моделирующие счетные устройства. Куормби** (Electronic analogue computing. Quarmby Raymond B.), Wireless World, 1954, **60**, № 3, 113—118 (англ.)

Популярная статья. Проводится сравнение цифровых машин и моделирующих устройств. Рассматриваются схемы с усилителями постоянного тока, генератор функций на электроннолучевой трубке, построение простейших структурных схем для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Указывается, что модель, построенная Английским авиационным исследовательским институтом (RAE — Royal Aircraft Establishment) в Фарнборо, содержит 16 интеграторов, 15 суммирующих усилителей, 12 функциональных устройств, 15 множительных устройств и 30 блоков для изменения масштабов и ввода начальных данных. *Н. Ф. Семикова*

2008. **Моделирующее устройство «Конвейр». Хоруиц** (The Convair analogue computer. Horwitz R. D.), Radio and Telev. News, Radio-Electronic Engng Ed., 1954, **51**, № 1, 61, 130, 131 (англ.)

Популярное описание принципов работы электронных моделирующих устройств. Приведено фото и некоторые сведения о моделирующем устройстве «Конвейр» (Convair). *Н. Ф. Семикова*

2009. **Счетно-решающая машина непрерывного действия** (Analogue computor), S. Afric. Electr. Rev., 1954, **45**, № 432, 23 (англ.)

Сообщение о выпуске в Белфасте (Сев. Ирландия) нового электронного моделирующего устройства, которое может быть использовано для решения дифференциальных уравнений, а также для моделирования физических систем. *П. В. Тихонов*

2010. **Электронные вычислительные машины** (Electronic computers), Tele-Tech, 1954, **13**, № 1, 74 (англ.)

Фирма «Форд» (Ford) применяет при разработках новых деталей моделирующее устройство, состоящее из пассивных фильтров. Это устройство позволяет, используя только чертеж детали, определять дефек-

ты конструкции коленчатого вала, кулачков, клапанов. На нем можно исследовать такие явления, как крутильные колебания коленчатого вала.

Предполагается, что в ближайшие 5 лет будут выпущены также образцы вычислительных машин для управления технологическими процессами.

В. Д. Князев

2011. Электронная машина. Бремер (Electronic brain. Bremer Edwin), Foundry, 1953, 81, № 12, 167 (англ.)

Сообщение о разработанном фирмой «Форд» моделирующем устройстве (см. реф. 2010). Машина имеет 1,8 *м* высоты, весит 100 *кг* и требует энергии меньше, чем обычный телевизионный приемник.

Л. А. Любович

2012. Автоматическая стабилизация тока луча в трубках запоминающего устройства типа Вильямса. Клейн (Automatic beam current stabilization for Williams tube memories. Klein Rudolph J.), Trans. I. R. E., 1953, EC-2, № 4, 8—11 (англ.)

Описана схема автоматической стабилизации тока луча трубки. Изменения тока луча вызываются несколькими причинами, главные из них следующие:

1. Так как катоднолучевые трубки в запоминающем устройстве типа Вильямса работают с током луча около 1 *мка*, что в 100 раз меньше номинального тока трубок, к управляющей сетке трубки прикладывается большое отрицательное смещение, так что ток луча образуют электроны с большими начальными скоростями. Поэтому незначительные изменения температуры катода приводят к существенным изменениям тока луча. Для некоторых трубок изменение напряжения накала на 10% вызывает изменение амплитуды выходного импульса на 75%.

2. Небольшие изменения температуры пушки приводят к изменению поля между сеткой и катодом, а следовательно, и тока луча. Этот эффект особо сказывается на трубках размером меньше 5 дюймов.

3. Напряжение смещения на трубку (порядка 40—100 *в*) берется с высоковольтного делителя. Изменение величины сопротивлений и напряжения питания этого делителя изменяет смещение. При коэффициенте усиления усилителя 35 000, для трубки типа 3JP1, изменение смещения на 1 *в* вызывает изменение выходного импульса «1» на 15 *в*. Для того чтобы поддерживать ток луча в определенных границах, создана схема автоматической стабилизации. Принцип действия схемы заключается в использовании одной ячейки экрана как контрольной. Выходной сигнал с этой ячейки периодически контролируется.

Стабилизация тока луча с помощью этой схемы достигается путем изменения потенциала катода, в зависимости от величины считываемых импульсов, которые в схеме стабилизации периодически сравниваются с эталонным напряжением. Для этой цели в трубке выделена одна контрольная ячейка, импульсы с которой подаются на вход схемы. Контроль может быть осуществлен как по положительным импульсам «1» (тире), так и по отрицательным импульсам «0» (точка), однако описанная схема работает по положительным импульсам, так как они в 5—10 раз более критичны к изменениям тока луча. Во избежание изменения величины считываемых из контрольной ячейки импульсов, связанного не с изменением тока луча, а с эффектом засева при обращении к соседним ячейкам, перед каждым контрольным считыванием производится регенерация. Контрольные считывания производятся через 20 *мсек.* и занимают вместе с регенерацией 40 *мксек.*

Настоящая схема стабилизации тока луча работала вполне удовлетворительно в машине ORACLE в течение двух месяцев. Приводится принципиальная схема системы стабилизации тока луча.

И. Д. Визун

2013. Улучшенная система хранения на электронолучевых трубках. Торенсен (An improved cathode ray tube storage system. Thorensen R.), Proc. Western Computer Conf. (Febr., 1953), New York, 1953, 167—173 (англ.)

В распространенной системе хранения электрических зарядов в виде точки — тире на электронолучевых трубках осциллографического типа коэффициент повторных обращений невелик, а устойчивость системы к дефектам экрана мала. Различные другие системы, в том числе двойная точка, расфокусирование — сфокусирование и т. д., не приводят к улучшению указанных выше показателей системы хранения. В статье предложен улучшенный вариант системы точки — тире, который основан на том, что различение считываемых сигналов 1 и 0 производится не по начальным, в идеальном случае разнополярным выбросам, а по более поздним участкам сигналов. В этом случае сигнал с тире получается отрицательным, с точки — почти отсутствует. При этом требуется несколько большее время облучения, а длительность пилообразного сигнала отклонения в случае тире сокращена против обычного значения 4 *мксек.* до 1—1,5 *мксек.*

Эта улучшенная система показала превосходство перед обычной как по коэффициенту повторных обращений, так и по устойчивости к дефектам экрана некоторых видов.

Е. И. Мамонов

2014. Курковые диполи из ферроэлектриков как запоминающий элемент для цифровых вычислительных машин. Пулвари (The snapping dipoles of ferroelectrics as a memory element for digital computers. Pulvari Charles F.), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New. York, 1953, 140—159 (англ.)

Приведены результаты экспериментального исследования физических свойств титаната бария, имеющих значение для применения этого материала в запоминающих устройствах.

Монокристаллы титаната бария обладают почти прямоугольной петлей гистерезиса и лучшей устойчивостью остаточной поляризации, чем поликристаллическая керамика. Однако технология изготовления монокристаллов намного сложнее, и для применения в запоминающих устройствах практическое значение имеет керамика, состоящая из множества отдельных неравномерно распределенных кристаллов. В экспериментах применялся керамический материал в виде пластины толщиной около 0,25 *мм* с подпаиваемыми посредством серебряного припоя электродами. Площадь ячеек составляла 1÷4 *мм*^{2} и емкость — 50÷180 *мкф*. После сильной поляризации остаточная поляризация сохраняется годами, после слабой — постепенно исчезает. Оказалось, что затухание остаточной поляризации является также функцией полной кристаллической ориентировки. Для хранения электрических сигналов выгод-

но иметь керамику с хорошо ориентированной структурой.

В статье даны экспериментальные кривые затухания остаточной поляризации, а также элементарные схемы отдельной запоминающей ячейки. Трудной задачей является создание практической схемы автоматического переключения ячеек при записи и считывании. Предложен принцип построения матричной схемы, в которой паразитные сигналы, появляющиеся с неизбираемых ячеек, можно уменьшить посредством кристаллических диодов и компенсирующего напряжения. *Е. И. Мамонов*

2015. **Повышение эффективности вычислительных машин** (Faster fact-power for management), Electr. World, 1953, **139**, № 24, 166 (англ.)

Фирма «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) сообщает о применении во вводных устройствах вычислительных машин этой фирмы магнитной ленты вместо перфокарт, что дает экономию и ускоряет ввод.

На 2,5 *см* магнитной ленты, применяемой в устройстве ввода машины УНИВАК (UNIVAC), размещается содержимое перфокарты. Рулон магнитной ленты может содержать до 1 400 000 чисел, а содержимое 20 000 перфокарт умещается в рулоне диаметром 20 *см*.

Сообщается о выпуске фирмой, помимо машин УНИВАК и ИРА-1103, электронного перфоратора. *А. И. Щуров*

2016. **Устройство для записи на магнитную ленту** (Tape handler), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 8, 712—713 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер» (Potter Instrument Co.) о выпуске устройств типа 901А и 901В для записи на магнитную ленту любой цифровой информации. Разгон ленты и остановка осуществляются в течение 5 мсек. с момента прихода соответствующего сигнала. Лента может двигаться в прямом и обратном направлениях с одинаковой скоростью. Имеется фотоэлекрический сервомеханизм для автоматической установки натяжения ленты в каждом отдельном случае, что исключает обрыв и соскакивание ленты. На стандартную катушку диаметром 26 *см* наматывается около 800 *м* ленты. Этого достаточно для непрерывной получасовой работы устройства. Для записи используется лента на пластической основе. *Л. С. Легезо*

2017. **Устройство для считывания с перфоленты. Уолд** (Perforated-tape reader. Wald Sidney), Tele-Tech, 1953, 12, № 7, 39, 108 (англ.)

Применяются следующие способы считывания с ленты: механический — с помощью штифтов и с помощью щеток, а также фотоэлектрический и пневматический.

Механический способ с помощью штифтов, устанавливающих электрический контакт при наличии отверстий, обеспечивает скорость считывания около 10 отверстий в 1 сек. Однако при стандартной ленте толщиной около 0,075 *мм* до наступления изнашиваемости ленты допускается лишь 10—15 протягиваний в процессе считывания. Считывание посредством щеточных контактов может производиться с более высокими скоростями по сравнению со считыванием посредством штифтов. Однако надежность подобных устройств низка вследствие значительного давления щеток на ленту и истирания проволок щеток.

Фотоэлектрический способ считывания лент находит широкое применение в цифровых машинах вследствие его высокой скорости. Там, где должно работать много лент одновременно, устройства становятся сложными и надежность их снижается.

Автором предлагается пневматическое устройство для считывания с перфоленты, разработанное по заказу войск связи США. Устройство имеет высокую надежность и дает весьма малый износ ленты. Приведен эскиз и описание работы пневматической системы.

Испытания производились на устройстве для 8-дырочной перфоленты. Скорость протяжки ленты около 6 *см/сек*, что при стандартной плотности пробивки дает частоту считывания около 25 *гц*. Вращение подающей и приемной бобин — в противоположных направлениях через скользящие муфты сцепления, поддерживающие постоянство натяжения ленты. При считывании с частотой 15 *гц* контакт замкнут в течение 20 мсек., разомкнут в течение 50 мсек. Сохраняется высокая надежность считывания до нескольких сотен прогонов ленты.

Е. И. Мамонов

2018. **Британская выставка промышленных товаров** (British instruments industries exhibition), Brit. Engng, 1953, **36**, № 95, 60 (англ.)

Фирмой «Ферранти» на выставке демонстрировался прибор для фотоэлектрического считывания с перфоленты (РЖМат, 1954, 2757, 2758). *А. Б. З.*

2019. **Электромагнитная муфта для больших ускорений. Остер, Вильсон** (An electromagnetic clutch for high accelerations. Oster S. M., Wilson L. D.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1453—1455 (англ.)

Рассматривается электромагнитная муфта, имеющая короткое время пуска и остановки ведомой части и предназначенная для протяжки магнитной ленты в устройствах ввода цифровых вычислительных машин. Рассмотрены два варианта муфт: однонаправленная и допускающая прямое и обратное вращение выходного вала. При подаче в электромагнит импульса тока входная пиковая мощность достигает 600 *ва*. Однонаправленная муфта разгоняет нагрузку, обладающую моментом инерции 20 *гсм* (момент инерции муфты 11,2 *гсм*), до 1755 об/мин. за 1,2—1,4 мсек., включая 0,4 мсек. на установление магнитного потока. Муфта, дающая возможность вращения в обе стороны, затрачивает на разгон той же нагрузки по времени на 0,3 мсек. больше. Приведены эскизные чертежи устройств.

В. Д. Князев

2020. **Быстродействующее выходное печатающее устройство с магнитными сердечниками. Гордон, Никола** (A high speed magnetic-core output printer. Gordon Bernard M., Nicola Renato N.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 6—12 (англ.)

Устройство состоит из 56 кольцевых магнитных сердечников, электронного дешифратора, электронолучевой трубки, программного счетчика и фотозаписывающего устройства.

Магнитные сердечники, имеющие прямоугольную петлю гистерезиса, расположены в виде сетки (7 вертикальных рядов по 8 сердечников в каждом ряду). Каждый из сердечников имеет две обмотки

одна из которых связана с соответствующей горизонтальной, а другая — с соответствующей вертикальной шинами сетки.

С помощью импульсов тока, поступающих на шины сетки, поочередно в каждом сердечнике меняется направление остаточного магнитного потока. В результате этого в «считывающих» проводах, проходящих через сердечники, наводятся импульсы э.д.с.

Каждый «считывающий» провод, проходя через определенные сердечники, образует конфигурацию какой-либо цифры или символа.

С помощью электронного дешифратора импульсы с соответствующего считывающего провода подаются на засветку электроннолучевой трубки.

Схема развертки трубки устроена так, что при последовательном обходе сердечников положение луча соответствует положению «считываемого» сердечника.

Расположение засвеченных точек на экране катоднолучевой трубки таким образом соответствует расположению сердечников, через которые проходит данный «считывающий» провод. С помощью фотозаписывающего устройства изображение с экрана фотографируется на фотопленку.

На экране 15-дюймовой трубки одновременно можно записать 6000 знаков высотой около 3 *мм* каждый. Скорость работы всего устройства составляет 500 000 знаков в 1 мин. Общее количество электронных ламп около 50.

Устройство может быть использовано для вывода и печати данных, полученных на быстродействующих цифровых вычислительных машинах.

В. В. Бардиж

2021. Быстродействующее устройство для печати (High speed printer), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 8, 712 (англ.)

Сообщение лаборатории Шепарда (Shepard Laboratories) о разработке нового быстродействующего печатающего устройства для вывода из счетной машины или печати с магнитной ленты. Производительность устройства достигает 108 000 печатных знаков в 1 мин. В устройстве имеется типовой барабан, по ширине которого укладывается 120 рядов печатных знаков, каждый ряд занимает вдоль строки 4 *мм*. По окружности барабана размещено 55 печатающих литер в каждом ряду, из них 26 букв, 10 цифр, 19 специальных знаков и знаков препинания. Бумага продвигается от внешнего сигнала на 5 *мм* за время около 9 мсек.

При печати только одних цифр была достигнута скорость 1800 строк в 1 мин. *Л. С. Легезо*

2022. Магнитный сервоусилитель с кристаллическими триодами (Servo amplifier is transistor-magnetic), Electronics, 1953, **26**, № 7, 309 (англ.)

Сообщение фирмы «Индастриал Контрол» (Industrial Control Co.) о выпуске нового сервоусилителя типа 434-В, служащего для привода 400 *гц* сервомоторов типа МК14 и МК7 для антенных следящих систем. Усилитель полностью автономен, не нуждается в отдельных источниках питания. Он помещен в герметический кожух размерами 50,8 × × 57,15 × 79,38 *мм* и весит 484 *г*. *Ю. И. Визун*

2023. Еще один передатчик на полупроводниковых триодах (Another transistor transmitter), Short Wave Mag., 1954, **11**, № 11, 664 (англ.)

Отмечается довольно длительная (в течение 4 месяцев) работа на местных телефонно-телеграфных связях, в диапазоне 1,7 *мгц*, передатчика, выполненного на пяти полупроводниковых триодах СЕТ-1. Потребление передатчика 0,5 *вт* при питающем напряжении 50 *в*. *Л. А. Любович*

2024. Многоэлектродные кристаллические приборы (Transistors with multiple elements), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 3, 163—164 (англ.)

Разрабатываются германиевые точечно-контактные приборы с тремя (тетроды) и четырьмя (пентоды) точечными контактами. Предполагается, что в ряде схем первые смогут заменить два, а вторые — три обычных триода, что должно повести к дальнейшему упрощению, миниатюризации и удешевлению схем. Приборы рассчитаны в первую очередь для импульсных применений в счетных схемах и для работы на малых сигналах.

Приводится перечень характеристик коммерческого точечно-контактного тетрода. Разработанная конструкция является герметической, что обеспечивает защиту от влаги. *А. Р.*

2025. Малогабаритный электронный переключатель (Tiny electronic switch), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 9, 361 (англ.)

Кремниевые диоды в настоящее время начинают широко применяться в вычислительной технике, технике связи и других областях техники. Преимуществами кремниевых диодов по сравнению с германиевыми являются малая величина обратного тока и более высокая рабочая температура.

Лаборатория «Белл» проектирует создание запоминающего устройства с использованием кремниевых диодов для цифровой вычислительной машины на полупроводниковых триодах.

Метод получения чистого кремния и технологии производства кремниевых диодов освоены промышленностью. *В. А. Зимин*

2026. Температурно стабильный кристаллический триод (Heat stable transistor), Sci. News Letter, 1954, **65**, № 4, 61 (англ.)

Электрохимический метод изготовления кристаллических триодов из германия, описанный ранее, был применен для случая кремния. Изготовленные кремниевые триоды обладают бо́льшей температурной стабильностью, чем германиевые. Одновременно они хорошо работают в высокочастотном диапазоне радиоволн. Указывается на большое значение таких триодов для военной техники. *А. Р.*

2027. Кристаллические триоды, охлаждаемые керосином. Мейнард, Брок (Kerosene cooled transistors. Maynard J. E., Brock R. L.), Electronics, 1953, **26**, № 10, 202, 204, 206 (англ.)

Описан точечно-контактный триод с охлаждением области контакта керосином за счет естественной конвекции последнего. Выбор керосина в качестве охлаждающей жидкости обусловлен малой вязкостью, большим температурным коэффициентом расширения и теплоемкостью последнего, а также тем, что керосин, как и другие алифатические углеводороды, неактивен в отношении поверхности германия. Бензин и другие ароматические углеводороды воздействуют на поверхность германия и сильно

портят обратную ветвь вольт-амперной характеристики германиевых диодов.

Охлаждение керосином, который для получения наилучших результатов должен непосредственно омывать точечные контакты, дает значительное увеличение стабильности работы цепей с триодами и несколько повышает максимальную допустимую температуру внешней среды. *А. Р.*

2028. **Экспериментальные полупроводниковые триоды для сверхвысоких частот** (Experimental transistors for UHF frequencies), Electr. Manufact., 1953, 52, № 3, 6 (англ.)

Краткое сообщение об экспериментальной работе фирмы RCA над усовершенствованными точечно-контактными полупроводниковыми триодами, способными работать при частотах порядка 425 *Мгц*; отмечается, что вследствие бо́льшей подвижности электронов, образцы триодов, изготовленные из материала с проводимостью типа «*p*», генерируют при частоте, превышающей в среднем на 33% частоту генерирования триодов, изготовленных из материала с проводимостью типа «*n*»,

В сообщении имеется ссылка на работу Хантера, (F. L. Hunter) по вопросам исследования полупроводниковых электронных приборов, представленную на последней объединенной конференции Института радиоинженеров и Американского института инженеров-электриков (IRE и AIEE), состоявшейся в колледже штата Пенсильвания. *Н. И. Бродович*

2029. **Новые полупроводниковые триоды** (New transistors), Aviat. Week, 1953, 59, № 10, 46 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5331.

2030. **Германиевые диоды серии NU** (NU germanium diodes), Radio-Telev. Serv. Dealer, 1953, 14, № 8, 45 (англ.)

Сообщение фирмы «Нейшнл Юнион Радио» (National Union Radio Corp., Transistor Division) о выпуске серии из 19 типов германиевых точечно-контактных диодов.

Указывается, что эти диоды имеют стабильные характеристики в диапазоне температур до 75° и предназначены для применения в счетных машинах, видеодетекторах, смесителях до 900 *мгц*. Отдельные типы диодов серии NU позволяют работать с обратным напряжением до 200 *в*. Так как диоды герметичны, то они могут работать в условиях большой влажности. Приводится таблица основных характеристик всех диодов этой серии. *Л. А. Любович*

2031. **Сборка германиевых диодов** (Assembling germanium diodes), Electronics, 1953, 26, № 8, 298—299 (англ.)

Фирма «Танг-Сол Электрик» (Tung-Sol Electric Inc.) сообщает о технологии сборки сверхвысокочастотных германиевых диодов и применяемом для этой цели оборудовании.

При сборке сверхвысокочастотных германиевых диодов на заводах авиационного оборудования фирмы применяется индукционная пайка. *Ю. И. Вигун*

2032. **Физические принципы действия выпрямителей и кристаллических триодов. Шпенке** (Die physikalische Wirkungsweise der Gleichrichter und Transistoren. Spenke Eberhard), Z. angew. Phys., 1953, 5, № 12, 472—480 (нем.)

Приведено описание процессов выпрямления и усиления переменного тока с помощью *p-n* переходов в полупроводнике. Приводятся удачные аналогии из знакомых явлений. Вкратце описано несколько различных типов кристаллических триодов (*n-p-n*, с точечными контактами и т. д.). *В. З.*

2033. **Малогабаритные танталовые конденсаторы** (Tiny tantalum capacitor), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 5, 487 (англ.)

Сообщение отдела конденсаторов фирмы «Дженерал Электрик» о выпуске новых малогабаритных конденсаторов (длина 5 *мм*, диаметр 3 *мм*), предназначенных для работы в схемах совместно с кристаллическими триодами. Рабочий диапазон температур от —20° до +50°. Хранение допускается при температуре до —65°. Рабочее напряжение от 2 до 16 *в* и емкость соответственно от 4 до 0,7 *мкф*. Другой тип танталовых конденсаторов имеет длину 12 *мм*, рабочее напряжение 2—16 *в* и емкости 8—1,5 *мкф*.

При снижении температуры до —55° и повышении напряжения сверх 10 *в* конденсатор сохраняет 65% номинальной емкости. *А. Б. Залкинд*

2034. **Производство печатных схем** (Printed circuit production), Radio-Electronic Engng Sec., 1954, May, 31 (англ.)

2035. **Вычислительные машины «Хаман 300» и «Хаман Е»** (Rechenmaschinen Modell «Hamann 300» und «Hamann E». Schl. R.), Feinwerktechnik, 1953, 57, № 12, 406 (нем.)

Приводятся краткие характеристики двух новых моделей клавишных вычислительных машин «Хаман 300» и «Хаман Е» фирмы «Дёйче Телефонверке унд Кабельиндустри» (Deutsche Telephonwerke und Kabelindustrie A. G.).

В машине «Хаман 300», выполняющей все четыре действия арифметики, для ввода чисел применяется нормальная цифровая клавиатура суммирующей десятиклавишной машины. Это является отличительной особенностью машины и позволяет производить набор чисел «вслепую». Кроме четырех действий, включая автоматическое деление и сокращенное умножение, машина может производить обратную передачу чисел из счетчика результата или из счетчика оборотов в механизм установки чисел, что дает возможность выполнять последующие действия над результатами вычислений без нового ввода их в машину от руки. В машине имеется специальная клавиша, при помощи которой можно прерывать деление для получения частного с нужным количеством знаков. Гашение механизма установки чисел производится автоматически при вводе нового числа. Скорость выполнения сложения и вычитания такая же, как в суммирующих машинах. Приводится фото.

Вторая модель, «Хаман Е», представляет собой усовершенствованную довоенную машину «Хаман Эльма» и является полуавтоматом. Машина производит автоматическое деление, полуавтоматическое умножение и обратную передачу чисел из счетчика результата в механизм установки чисел.

Обе модели демонстрировались на Германской промышленной выставке в Берлине в 1953 г.

Б. М. Полыковская

2036 РЕЦ. **Теория информации и ее технические применения. Белл** (Information theory and its engineering applications. Bell D. A.,

119+21 pp., index 17 pp., appendix VIII pp., New York, Pitman Publishing Corporation, 1953, 4.00 doll.) [**Рецензия: Марчанд** (Marchand Nathan), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 4, 768 (англ.)]

2037 Д. Исследование устройств, автоматизирующих процесс умножения в вычислительных машинах. Вашкевич Н. П. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. высш. техн. училище, М., 1954

2038 Д. Механические способы основных маркшейдерских вычислений. Никольский С. И. Автореф. дисс. канд. техн. н., Донецкий индустр. ин-т, Сталино, 1953

2039 П. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках и вспомогательная аппаратура. Браун (Magnetic memory storage circuits and apparatus. Browne Frank A., Jr) [Transducer Corp.]. Пат. США 2654080, кл. 340—174, 29.09.53

Схема запоминающего устройства на ферромагнитных сердечниках (регистр со сдвигом) для запоминания чисел, представленных в двоичной системе, и схема генератора, который выдает импульсы тока в обмотки сердечников для осуществления кольцевого сдвига. *В. В. Карибский*

2040 П. Электронное запоминающее устройство. Вильямс (Electronic information storage device. Williams Frederic C.) [National Research Development Corp.]. Пат. США 2642550, кл. 315—12, 16.06.53

Запоминающее устройство на обычной электронолучевой трубке, в котором для запоминания одного из двух состояний элемента экрана на сигнальную пластину подается, либо не подается, напряжение высокой частоты, чем образуются две различные формы потенциального рельефа.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

2041. Автопилот на кристаллических триодах (Transitorized autopilot), Army-Navy-Air Force J., 1954, **92**, № 14, 418 (англ.)

По сообщению американской фирмы «Бендикс» (Bendix Aviation Corp.) в мае 1954 г. был осуществлен первый полет с использованием для управления самолетом автопилота, в котором все электровакуумные лампы были заменены кристаллическими триодами.

Вторая система автоматического управления, работающая на кристаллических триодах, была передана фирмой «Бендикс» научно-испытательному центру «Райт» ВВС США в апреле 1954 г. Эта система установлена на истребителе «Локхид F94C» и проходит наземные испытания.

2042. Цифровой автопилот (Digital autopilot), Aviat. Week, 1954, **60**, № 20, 44 (англ.)

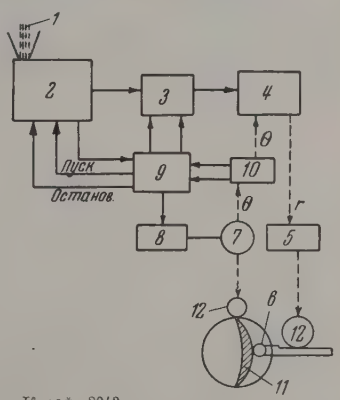
Новый тип автопилота, использующего цифровые вычислительные устройства вместо устройств непрерывного действия, разработан фирмой «Рей» (J. B. Rea Co., Santa Monica, Calif.). По сообщению фирмы цифровые устройства дают лучшие результаты в эксплуатации, большую гибкость и имеют меньший вес. *Д. П.*

2043. Управление станком от вычислительной машины. Мерглер, Мошос, Янг (Machine tool control from a digital-analog computer. Mergler Harry W., Moshos George J., Young Allen E.), Trans. I. R. E., 1953, PGIE-1, August, 26—30 (англ.)

Описывается устройство для автоматического управления металлорежущим станком, который обрабатывает лопатки ротора компрессора и турбины реактивного двигателя (см фиг. 1) по профилю, заданному вычислительной машиной. Вычислительная машина *2* (см. фиг. 2) типа ИБМ с перфокартным входом преобразует записанные на перфокартах прямоугольные координаты точек профиля лопатки в полярные. График движения резца (фрезы) станка в этом устройстве определяется вычисленными полярными координатами лишь для нескольких опорных точек профиля. Число точек для каждого сечения лопатки профиля выбирается порядка 30—40 через равные интервалы полярного угла.

К реф. 2043

Фиг. 1



К реф. 2043

Фиг. 2

1 — перфокарты; *2* — вычислительная машина ИБМ-523; *3* — релейное запоминающее устройство; *4* — интерполятор; *5* — силовая система; *6* — режущий инструмент станка (фреза); *7* — двигатель подачи станка; *8* — контроль скорости двигателя подачи; *9* — блок контроля; *10* — контакты импульсов θ; *11* — обрабатываемая на станке лопатка ротора турбины; *12* — зубчатые передачи

Промежуточные значения между каждыми двумя опорными точками профиля интерполируются по формуле третьей степени с помощью интерполятора *4*, состоящего из трех механических интеграторов. Для перехода от одного интерполяционного интер-

вала к следующему необходимо лишь ввести функцию четвертой разности в первый и третий интегратор.

Вычислительная машина ИБМ дает значения четвертой разности для каждого интервала в виде трехзначного десятичного числа, код которого фиксируется пробивками на перфокартах. С помощью выпрямительной сетки десятичный код четвертой разности преобразуется в двоично-десятичный код. Последний запоминается релейным устройством *3*. Этот код преобразуется далее в угловое перемещение вала серводвигателя. Преобразование осуществляется с помощью самобалансирующего моста, в одно из плечей которого вводится сопротивление, соответствующее коду числа. Значение четвертой разности в виде механического перемещения подается далее в интерполятор *4*. Последовательным интегрированием на выходе интерполятора непрерывно образуются значения функции $r(\theta)$, пропорциональной перемещению фрезы. Значения $r(\theta)$ задают положение следящей системы, которая с помощью двигателя перемещает фрезу *6*. Двигатель подачи станка *7* вращает стол подачи с заданной скоростью на угол θ. Синхронизация считывания данных с перфокарт на выходе вычислительной машины с работой интерполятора осуществляется с помощью блока связи *9* и с помощью контактов *10* синхронизации на валу независимой переменной θ.

Время, необходимое для чтения одной перфокарты, для балансировки моста при преобразовании цифровых величин в перемещение вала и для переключения валов интегратора, составляет около 1 сек. Максимальная скорость работы для полного цикла интерполяции при изменении θ от 0 до 360° составляет около 10 мин. Испытания качества управления станком от вычислительной машины были произведены для универсального станка фирмы «Браун энд Шарп» (Brown and Sharpe) и для вертикально-фрезерного станка. Управление фрезой станка осуществлялось с помощью асинхронного двигателя мощностью в 3/4 л. с. Полная накопленная ошибка интерполятора для всего цикла составляла около 0,1%.

Ф. М. Майоров

2044. **Применение новой электронной счетной машины при автоматизации процессов на нефтеперерабатывающих заводах** (Automatic refining is feasible with new electronic computer), Petrol. Process., 1953, 8, № 3, 431 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» об использовании вычислительной машины ИРА-1103 (ERA-1103; см. РЖМат, 1954, 1849) для автоматизации технологических процессов на нефтеперерабатывающих заводах.

На различных стадиях рабочего процесса машина будет получать данные о ходе производственного процесса через чувствительные элементы. Эти данные будут обрабатываться в счетной машине в соответствии с программами, которые вводятся в машину предварительно, а результаты подсчетов будут использоваться для управления процессом. При желании машина может получать данные, основанные на анализе сырья, находящегося в стадии переработки, и регулировать процесс перегонки таким образом, что в результате будет получен продукт наиболее экономически выгодный.

2045. **Использование электронной вычислительной машины в нефтеперерабатывающей промышленности** («Electronic brain» used for refinery control?), Oil and Gas J., 1953, 51, № 42, 229 (англ.)

См. реф. 2044.

См. также: 1641

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абаджиев С. 1902
Абельянас 1935
Агарвал 1819
Агостинелли 1758, 1779
Агостини 1595
Адамар 1764
Акаике 1885
Акатнов Н. И. 1785
Аллен 1828
Альбрехт 1689, 1690
Альтман 1846
Англес д'Орьяк 1843, 1844
Аннис 1901
Апаро 1967
Апостол 1612
Ара 1938
Аржаных И. С. 1798, 1799 К
Аспейтия 1718

Б

Бабич В. М. 1759
Байрактаревич 1807
Баласубраманьян 1908
Банахевич 1970
Барбэлат 1741
Барна 1965
Бартелеми 1812 К
Башелейшвили М. О. 1773
Бейер 1620
Белл 2036 Д.
Белман 1896
Белый Б. Н. 1593
Бельграно-Бремар 1963
Бенедикти 1927
Бер 1668
Бернацкий 1806
Биллинг 1986
Бинг 1697
Бирман М. Ш. 1852
Бирман 1986
Бисли 1704
Блан 1959
Блассель 1864
Блэр 1681
Боас 1733
Бойер 1589
Боль 1717
Бомпьяни 1947
Бородянский М. Я. 1661
Бос 1833
Браудер 1768
Браун 2039 П
Брауэр 1616
Брёйн 1744
Брело 1748
Бремер 2011
Брок 2027
Бромберг 1826
Бронштейн И. Н. 1588 К
Бугров Я. С. 1913
Буланже 1751
Булиган 1795 РЕЦ
Бур 1875
Буркхардт 1894
Буцано 1948
Бьюрингтон 1586
Бюро 1601
Бюрниа 1931

В

Вазов 1742
Вайда 1893
Валландер С. В. 1771
Вандивер 1619, 1638, 1639
Ван ши-цян 1608
Варга 1905
Ватанабе 1879
Вашкевич Н. П. 2037 РЕЦ
Вахнин В. М. 1775
Вдовин И. В. 1976 Д
Вейнерт 1972
Вейссингер 1708
Вильсон 2019
Вильсон 1837
Вильямс 2040 П
Вильямс 1960
Винер 1865, 1866
Виноградов 1648 П
Витушкин А. Г. 1701, 1702
Вольфовиц 1878
Воробьев Н. Н. 1858
Вулф 1836

Г

Гагуа М. Е. 1749
Галеев А. У. 1772
Галлarати 1928
Гарабедян 1755
Гарсия 1645
Гачайи 1658
Гёдикке 1895 К
Гельфанд 1664 К
Гельфонд А. О. 1610
Гитель 1912
Гихман И. И. 1870
Главатый 1942
Глинская Н. Н. 1957
Глодан 1643
Голдберг 1630
Голденберг 1969
Гольдин Е. М. 1958
Гордон 2020
Гормсен 1929
Грей 1640
Грейг 1981
Грин 1710
Грин 1737 К
Гросс 1795 РЕЦ
Гудман 1872
Гуменюк В. С. 1956
Гуревич Л. А. 1850
Гьюдерли 1780

Д

Далецкий Ю. Л. 1739
Дантони 1929
Дарвин 1868
Дас 1789
Даукер 1691
Дейвис 1910
Дейкке 1940
Делоне Б. Н. 1617
Дельрю 1820, 1821, 1838
Демаховская Р. И. 1906
Депман И. Я. 1592
Дербин 1890
Джайлет 1900
Джваршейшвили А. Г. 1703
Джеймс 1699
Джонсон 1652 К
Диковская Э. И. 1822
Дин 1788
Дитль 1841
Добрышман Е. М. 1766
Доморяд А. П. 1966

Е

Евграфов М. А. 1725

Ж

Жаффар 1677
Жгенти В. С. 1787
Женхэн О. 1738

З

Зайцев Г. А. 1840
Залгаллер 1952
Зауэр 1949
Зейденберг 1679
Зигель 1865, 1866
Зингер 1810
Зия-эд-Дин 1880
Зламал Милош 1740
Зюзько М. П. 1857 Д

И

Ивс 1603 К
Ильин В. П. 1705
Исеки 1684, 1688

К

Кавалларо 1642
Казнав 1815, 1842
Камалов М. К. 1930
Камерон 1765
Карлин 1862
Карлиц 1631, 1632, 1635 1644, 1813
Карлсон 1786
Карруччо 1594
Касимов Д. М. 1753
Кастро 1920
Каулинг 1794 К
Каяньелло 1855
Келдыш Л. 1693
Келдыш М. В. 1723
Кильчевский Н. А. 1801
Кине 1812 К
Кирш 1951
Китаглав 1879
Китахара 1879
Клайн 1760
Кламхин 1860

Кларксон 1781
Клатуэрти 1883
Клаус 1591
Клейн 2012
Клейнфелд 1683
Козневская 1873
Колер 1943
Коллац 1756, 1954
Кретнер 1918
Крулль 1655
Куга 1671
Кудо 1888
Кун 1898 К
Куон 1973
Куормби 2007
Купрадзе В. Д. 1773
Курота 1609 РЕЦ
Курош А. Г. 1680
Кшивоблоцкий 1782
Кьюрти 1729
Кэрис 1653 К

Л

Лаврентьев М. А. 1736
Лампарьелло 1909
Лангхар 1917
Ласала-Мильяруэло 1923 К
Лёб 1899
Лебедев Н. Н. 1829 К
Лейн 1700
Лелон 1735
Лемер 1638
Лемер 1638
Лея 1915 К
Либман 2006
Линник Ю. В. 1611
Ли Сяо-чжуань 1692
Лось 1607
Лохер-Эрнст 1583
Льюис 1637

М

Макар 1721, 1722
Макинтайр 1837
Макинтайр 1724
Мак-Махон 1778
Маллоус 1887
Мантел 1859
Маркос-де-Лануса 1923 К
Марк'онна 1925
Мартинелли 1936
Марчанд 2036 РЕЦ
Мацусака 1934
Мачинский 1869
Мейнард 2027
Менделсон 1650
Мерглер 2043
Мердок 1828
Мерик 1876
Микеладзе Ш. Е. 1974 К
Михлин С. Г. 1754
Мозер 1651
Мойн-эд-Дин 1880
Мойс 1695, 1696
Молодший В. Н. 1602 К
Мор 1946
Моргенстерн 1897 К
Моррис 1968
Морс 1698
Мостовский А. 1604
Мостков М. М. 1805
Моултон 1597
Мохон-Рой 1886
Мошос 2043
Мукхерджи 1818
Мысовских И. П. 1957

Н

Наглер 1662
Надь 1731, 1907, 1924
Наир 1891
Накаи 1933
Нарасимхан 1767
Нараян 1665 К
Натуччи 1599
Нёйман 1674
Нёйман 1897 К
Нёймер 1713
Нёрлунд 1824, 1825
Неф 1711
Никола 2020
Николаев П. В. 1971
Никольский С. И. 2038 К
Номати 1879
Нортхем 1686
Нужин М. Т. 1728
Ньюман 1630

О

Окабе 1745
Окума 1712
Орлич 1848
Осима 1682
Остер 2019
Оттавиани 1863
Оттерсон 1904
Оуэнс 1882

П

Пайпс 1802
Парзен 1706
Пастори 1945
Патлак 1867
Пауэр 1816
Пермутти 1678, 1930
Перрон 1720
Пилатовский В. П. 1839
Пини 1743
Пинль 1938
Пиплс 1629
Плуме З. Я. 1750
Погожельский В. 1800
Поллард 1716
Прателли 1916
Прахар 1614
Примаков 1901
Проттер 1770
Пуату 1649 Д
Пулвари 2014
Пьяццолла-Белок 1922 К

Р

Радо 1715
Рай 1783
Райский 1792
Рассек 1975 К
Ратхи 1834, 1835
Рашевский 1585
Рейц 1979
Ривье 1854
Роджерс 1621
Розенбаум 1871
Розенфельд Б. А. 1939
Рой 1884
Ромиг 1980 К
Рот 1932
Рубинштейн Г. Ш. 1660
Рубинштейн Л. И. 1793
Ружичка 1853
Руз 1941
Русанов Б. В. 1777
Русопулос 1856
Руссо 1670

С

Себаштьян-и-Силва 1587
Самет 1626, 1627
Санделиус 1889
Сандрум 1874
Санкаран-Намбияр 1657
Сато 1797
Сато 1814
Сатхе 1613
Свифт 1630
Сегё 1757
Седлачек 1647
Седов Л. И. 1776
Селе 1659
Семендяев К. А. 1588 К
Сендгрен 1914 К
Серрин 1752, 1762
Силбиндер 1616
Силви 1881
Синг 1964
Скоробогатько В. Г. 1961
Слейтер 1978
Смирнов В. И. 1811 К
Соболев В. И. 1849
Сойер 1625
Солзер 1962
Соукуп 1646
Стампаккья 1803
Страус 1630
Суньер-и-Балагер 1732, 1734
Суонсон 1823
Суэцуна 1609 РЕЦ
Сюй Ли-чжи 1830

Т

Таккер 1898 К
Танака 1719
Таргонский 1808
Тарский 1714
Татон 1598
Тверской 1975 К
Тейс 1911
Темперли 1615
Терасака 1694
Террачини 1600
Томсон 1877
Торенсен 2013
Трамплер 1823
Турумару 1851
Тьябджи 1944

У

Угодчиков А. Г. 1790
Уилкинс 1804
Уитл 1861
Уолд 2017
Уоллес 1663
Уотсон 1900
Уотсон 1831
Уразбаев Б. М. 1618
Усами 1977
Уцуми 1687

Ф

Фаддеев Д. К. 1676
Феррар 1654 К
Фландерс 1656
Флетт 1726
Флору В. Н. 1955
Фокс 1832
Фокс 1666, 1667
Фрадлин Б. Н. 1801
Франк-Каменецкий В. А. 1921
Франк 1720
Фростман 1596
Фью 1623

Х

Хазаи 1919
Хаимов Н. Б. 1747 Д
Хак 1769
Халл 1823, 1836
Хажинский 1847
Хаселгров 1615
Хатчерсон 1926
Хаяси 1885
Хед 1968
Хейс 1761
Хельвиг 1763, 1769
Хельгрен 1791
Хендриксон 1786
Хигман 1674
Хомма 1694
Хоруиц 2008
Хоссу 1809
Хюльтен-Каваллиус 1914 К

Ц

Цаппа 1685
Цесляк 1580
Цинь Юань-сюнь 1727
Цубои 1669
Цудзи 1624
Цыпкин М. Е. 1937

Ч

Чеккони 1709
Черчхауз 1622
Честон 1901

Четаев Д. Н. 1784
Чэпман 1794 К

Щ

Шази 1746 К
Шанин Н. А. 1605, 1606
Шахновский С. М. 1801
Шварц 1707
Шварц Ш. 1672, 1673
Шёнхольцер 1845 К
Шереш 1636
Шефке 1827
Шиффер 1755
Шош 1950
Шпенке 2032
Штанге 1892
Штёйервальд 1634
Шток 1984
Штольт 1675 Д

Э

Эбаноидзе Т. А. 1796
Эда 1633
Эйдус Д. М. 1774
Эфендиев М. Р. 1590

Я

Яблонский 1581
Янг 2043
Янг 1953
Янкович 1817
Янковский 1730
Ярник 1628

A

Abellanas P. 1935
Agarwal R. P. 1819
Agostinelli C. 1758, 1779
Agostini A. 1595
Akaike H. 1885
Albrecht F. 1689, 1690
Allen A. C. 1828
Altman M. 1846
Anglès d'Auriac H. 1843, 1844
Annis M. 1901
Aparo E. 1967
Apostol T. M. 1612
Ara R. 1938
Azpeitia A. G. 1718

B

Baer R. 1668
Bajraktarević M. 1807
Balasubramanian N. 1908
Banachiewicz T. 1970
Barbălat I. 1741
Barna B. 1965
Bapthélémy R. 1812 К
Beesley E. M. 1704
Belgrano Bremard J. C. 1963
Bell D. A. 2036 РЕЦ
Bellman R. 1896
Benedicty M. 1927
Beyer G. 1620
Biermann L. 1986
Biernacki M. 1806
Billing H. 1986
Bing R. H. 1697
Blair R. L. 1681
Blanc Ch. 1959
Biassel P. 1864
Boas R. P. Jr. 1733
Boer J., de 1875
Behl J. G., von 1717
Bompiani E. 1947
Bose N. N. 1833
Boulanger J. 1751
Bouligand G. 1795 РЕЦ
Boyer C. B. 1589
Brauer A. 1616
Brelot M. 1748
Bremer E. 2011
Brock R. I., 2027
Bromberg J. 1826
Browder F. E. 1768
Browne F. A., Jr. 2039 П
Bruijn N. G. de 1744
Bureau F. 1601
Burington R. S. 1586
Burkhardt F. 1894
Burniat P. 1931
Buzano P. 1948

C

Caianiello E. R. 1855
Cameron R. H. 1765
Caris V. B. 1653 К
Carlitz L. 1631, 1632, 1635, 1644, 1813
Carlson J. F. 1786
Carruccio E. 1594
Castro H. de 1920
Cavallaro V. G. 1642
Cazenave R. 1815, 1842
Cecconi J. 1709
Chapman S. 1794 К
Charzyński Z. 1847
Chazy J. 1746 К
Cheston W. 1901
Churchhouse R. F. 1622
Ciéslak T. S. 1580
Clarkson M. H. 1781
Clatworthy W. H. 1883
Collatz L. 1756, 1954
Cowling T. G. 1794 К

D

Dantoni G. 1929
Darwin J. H. 1868
Das S. Ch. 1789
Davis Ch. 1910
Dean W. R. 1788
Deicke A. 1940
Delerue P. 1820, 1821, 1838
Ditl A. 1841
Dowker C. H. 1691
Durbin J. 1890

E

Eda Y. 1633
Eves H. 1603 К

F

Ferrar W. L. 1654 К
Few L. 1623
Flanders H. 1656
Flett T. M. 1726
Fox Ch. 1832
Fox R. H. 1666, 1667
Frank E. 1720
Frostman O. 1596

G

Gacsályi S. 1658
Gallarati D. 1928
Garabedian P. R. 1755
Garcia M. 1645
Gel'fand K. M. 1664 К
Gilet P. M. 1900
Gloden A. 1643
Goedicke V. 1895 К
Goldberg K. 1630
Goldenberg H. 1969
Goodman L.-A. 1872
Gordon B. M. 2020
Gormsen S. T. 1929
Green J. W. 1710
Green S. L. 1737 К
Greig J. 1981
Grey L. D. 1640
Gross B. 1795 РЕЦ
Guderley G. 1780
Guitel G.-G.-M. 1912

H

Haack W. 1769
Hadamard J. 1764
Haselgrove C. B. 1615
Hayashi Ch. 1885
Hayes W. D. 1761
Hazáy I. 1919
Head J. W. 1968
Hellgren G. 1791
Hellwig G. 1763, 1769
Hendrickson T. J. 1786
Higman G. 1674
Hlavatý V. 1942
Homma T. 1694
Horwitz R. D. 2008
Hosszu M. 1809
Hull T. E. 1823, 1836
Hutcherson W. R. 1926
Hyltén-Cavallius C. 1914 К

I

Iseki K. 1684, 1688

J

Jadłoński H. 1581
Jaffard P. 1677
James R. D. 1699
Jankowski W. 1730
Janković Z. 1817
Jarnik V. 1628
Johnson R. E. 1652 К

K

Karlin S. 1862
Kirsch A. 1951
Kitagawa T. 1879
Kitahara T. 1879
Klamkin M. S. 1860
Klaus G. 1591
Klein R. J. 2012
Kleinfeld E. 1683
Kline M. 1760
Kohler M. 1943
Koźniewska I. 1873
Krettner J. 1918
Krull W. 1655
Krzywoblocki M. Z. V. 1782
Kuerti G. 1729
Kudô A. 1888
Kuga M. 1671
Kuhn H. W. 1898 К

L

Lampariello A. 1909
Lane R. E. 1700
Langhaar H. L. 1917
Lasala Millaruelo J. 1923 К
Lehmer D. H. 1638
Lehmer E. 1638
Leja F. 1915 К
Lelong P. 1735
Lewis D. J. 1637
Liebmann G. 2006
Locher-Ernst L. 1583
Loeb J. 1899
Loś J. 1607

M

Macintyre A. J. 1837
Macintyre Sh. S. 1724
McMahon J. 1778
Makar R. H. 1721, 1722
Mallows C. L. 1887
Mantel N. 1859
Marchand N. 2036 РЕЦ
Marchionna E. 1925
Marcos de Lanuza F. 1923 К
Martinelli E. 1936
Matschinski M. 1869
Matsusaka T. 1934
Maynard J. E. 2027

McMahon J. 1778
Mendelsohn N. S. 1650
Mergler H. W. 2043
Méric J. 1876
Mohon—Roy P. 1886
Moin-ud-Din S. M. 1880
Moise E. E. 1695, 1696
Moor A. 1946
Morgenstern O. 1897 К
Morris J. 1968
Morse A. P. 1698
Moser L. 1651
Moshos G. J. 2043
Moulton E. J. 1597
Mukherjee B. N. 1818
Murdoch B. H. 1828

N

Nagler H. 1662
Nair K. R. 1891
Nakai Y. 1933
Narasimhan R. 1767
Narayan S. 1665 К
Natucci A. 1599
Nef W. 1711
Neumann B. H. 1674
Neumann J. von 1897 К
Neumer W. 1713
Newman M. 1630
Nicola R. N. 2020
Nomachi Y. 1879
Nørlund N. E. 1824,1825,
Northam E. S. 1686

O

Ohkuma T. 1712
Okabe J. 1745
Orlicz W. 1848
Osima M. 1682
Oster S. M. 2019
Ottaviani G. 1863
Otterson K. 1904
Owens B. W. 1882

P

Parzen E. 1706
Pastori M. 1945
Patlak C. S. 1867
Peeples W. D. 1629
Permutti R. 1678, 1930
Perron O. 1720
Piazzolla Beloch M. 1922 К
Pini B. 1743
Pinl M. 1938
Pipes L. A. 1802
Poitou G. 1649 Д
Pollard H. 1716
Power G. 1816
Prachar K. 1614
Pratelli A. M. 1916
Primakoff H. 1901
Protter M. H. 1770
Pulvari Ch. F. 2014

Q

Quan R. F. 1973
Quarmby R. B. 2007
Quinet J. 1812 К

R

Rado R. 1715
Rashevsky N. 1585
Rathie C. B. 1834, 1835
Ray M. 1783
Rayski J. 1792
Reiz A. 1979
Rivier D. 1854
Rogers C. A. 1621
Romig H. G. 1980 К
Rosenbaum S. 1871
Roth L. 1932
Roussopoulos P. 1856
Roy P. M. 1884
Ruse H. S. 1941
Russek J. T. V. 1975 К
Russo S. 1670

S

Salzer H. E. 1962
Samet P. A. 1626, 1627
Sandelius M. 1889
Sankaran Nambiar P. P. 1657
Sathe L. G. 1613
Satō T. 1797
Satô Y. 1814
Sauer R. 1949
Sawyer D. B. 1625
Schäfke F. W. 1827
Schiffer M. 1755
Schönholzer E. 1845 К
Schwartz J. 1707
Sebastião e Silva 1587
Sedláček J. 1647
Seelbinder B. M. 1616
Seidenberg A. 1679
Sendgren L. 1914 К
Seres I. 1636
Serrin J. B. 1752, 1762
Siegel A. 1865, 1866
Silvey S. D. 1881
Singer I. 1810
Slater L. J. 1978
Soós G. 1950
Soukup J. 1646
Spenke E. 2032
Stampacchia G. 1803
Stange K. 1892
Steuerwald R. 1634
Stock J. R. 1984
Stolt B. 1675 Д
Straus E. G. 1630
Sundrum R. M. 1874
Sunyer i Balaguer F. 1732, 1734
Swanson C. A. 1823
Swift J. D. 1630
Synge J. L. 1964
Sz.-Nagy G. 1731, 1907, 1924
Szegö G. 1757
Szele T. 1659

T

Tanaka Ch. 1719
Targonszky G. I. 1808
Tarski A. 1714
Taton R. 1598
Temperley H. N. V. 1615
Terasaka H. 1694
Terracini A. 1600
Theis E. 1911
Thomson G. W. 1877
Thorensen R. 2013
Trumpler D. A. 1823
Tsuboi T. 1669
Tsuji M. 1624
Tucker A. W. 1898
Turumaru T. 1851
Twersky V. 1975 К
Tyabji S. F. B. 1944

U

Usami T. 1977
Utumi Y. 1687

V

Vajda S. 1893
Vandiver H S. 1619, 1638, 1639
Varga O. 1905
Vinogradov I. M. 1648 К

W

Wald S. 2017
Wallace A. H. 1663
Wasow W. 1742
Watanabe N. 1879
Watson G. S. 1900
Watson W. H. 1831
Weinert Otto 1972
Weissinger J. 1708
Whittle P. 1861
Wiener N. 1865, 1866
Wilkins J. E., Jr. 1804
Williams F. C. 2040 П
Williams K. P. 1960
Wilson L. D. 2019
Wilson R. 1837
Wolfe W. A. 1836
Wolfowitz J. 1878

Y

Young A. E. 2043
Young D. 1953

Z

Zalgaller V. A. 1952
Zappa G. 1685
Zia-ud-Din M. 1880

徐利治 1830
末綱 1609
李孝傳 1692
王世強 1608
秦元勳 1727
黒田成勝 1609